



TITLE:

Some examples of the Stokes geometry for Noumi-Yamada Systems(Toward the complete and algorithmic description of the Stokes geometry)

AUTHOR(S):

本多, 尚文

CITATION:

本多, 尚文. Some examples of the Stokes geometry for Noumi-Yamada Systems(Toward the complete and algorithmic description of the Stokes geometry). 数理解析研究所講究録 2006, 1516: 21-167

ISSUE DATE:

2006-09

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/58704>

RIGHT:

Some examples of the Stokes geometry for Noumi-Yamada Systems

本多尚文 (Naofumi HONDA)
北海道大学大学院理学研究院

I. 序

Lax pair を持つような非線形方程式のストークス幾何を考える上で、最も重要な指導指針の1つは、「非線形方程式系のストークス曲線は、対応する線形方程式系のストークス曲線が大域的に不連続変化する点である」が挙げられる。本稿は、この観点からパンルベ系の拡張である野海山田方程式系のストークス幾何を決定しようという試みの中で、具体的に計算した多くの例をまとめたものである。

野海山田系という具体的な方程式系を対象としているにもかかわらず、指導指針からストークス幾何を決定するのはそれほど容易い事ではない。その1つの理由として、方程式系が高階である事が挙げられる。2階の方程式と異なり、ストークス幾何は古典的な変わり点やストークス曲線の他に、仮想変わり点や new Stokes curves が必要となる ([AKT], [AKKSST])。必然的にストークス幾何は大変複雑なものとなる。特に、指導指針の言う、不連続変化が起きる点での線形方程式のストークス幾何の特徴 (縮退) を把握するのはなかなか困難な仕事である。

具体例を集める事の意義を理解する為に、この状況をもう少し詳しく述べる事とする。非線形方程式を線形近似する事で線形方程式と同様に非線形方程式系の形式的なストークス曲線を描く事が出来る。この形式的なストークス曲線上の変わり点に十分近い点 t では、対応する線形方程式系のストークス幾何で、2つの変わり点がストークス曲線で直接結ばれるという縮退が起きる事が証明されている (竹井 [T])。2つの変わり点が直接結ばれている時、 t をストークス曲線からはずすと、ストークス曲線が大域的に不連続変化する事を generic な場合に示す事が出来る。従って、 t が変わり点に十分近い限り形式的なストークス曲線は指導指針の意味でストークス曲線となり、指導指針は2つの変わり点が直接ストークス曲線で結ばれる点と言い換える事が出来る。

t が形式的なストークス曲線上だが変わり点からは離れている時、(高階方程式系では) 事態はそう単純でないことを佐々木 ([S1], [S2]) は見いだした。実際、もはや直接ストークス曲線で結ばれるような2つの変わり点は存在しなくなるのである。佐々木は、この困難を仮想変わり点と new Stokes curves を用いることで、2つの変わり点が結ばれなくなる代わりに仮想変わり点と変わり点が直接ストークス曲線で結ばれることを見いだし解決した。更に、

この場合、 t を形式的なストークス曲線からはずすと不連続変化が起きる事も具体例で検証した。

しかし、残念な事に仮想変わり点と変わり点が直接ストークス曲線で結ばれていても、 t を形式的なストークス曲線からはずした時、不連続変化が起きない例が沢山ある事が判った。つまり、直接変わり点同士が結ばれる時とは異なり、仮想変わり点と変わり点が直接ストークス曲線で結ばれる事は、指導指針の言い換えにはならないわけである。結ばれる仮想変わり点、もしくは結ばれ方に何らかの特別な性質が必要であり、その性質の究明が望まれた。

他方、西川 ([KKNT]) による他のパウルベ系の研究から、形式的なストークス曲線以外に指導指針を満たすストークス曲線が存在する事が知られていた (西川現象)。このストークス曲線は、非線形方程式形の2つのストークス曲線の交点から派生する。野海山田系はより複雑な状況となるのだが、佐々木は西川現象に準ずる現象として、2つの仮想変わり点が直接ストークス曲線で結ばれ、さらに、仮想変わり点が napping と呼ばれる現象を持つようなものを見つけ出した。実際に計算してみると判るが、野海山田系の線形方程式のストークス幾何は非常に複雑でこのような現象を見いだした佐々木の仕事は十分に評価されるべきものである。

確かに、napping は何らかの不連続現象が起きている間接的証拠と考えられる。だが、非線形方程式のどのストークス曲線に起因する不連続性から引き起こされたものか明確ではなく、また、 t が2つのストークス曲線の交点から離れた所にある場合は、局所的に t を動かしても napping は観測できないという困難さがある。この問題に対しても直接的な特徴付けが望まれた。

これらの問題点に対し、筆者らの研究により、適切なモデルを設定する事で、

1. 指導指針の縮退はグラフ論的な有効双方向2分木として捉えられる事、
2. また、有効双方向2分木が存在する時、 t を形式的なストークス曲線からはずすと、有効双方2分木は幾つかの有効単方向木に分解し、その単方向木の開放端点上のストークス曲線が不連続変化をする事、

が明らかになった。一般的な場合に、指導指針は有効双方向2分木の存在に言い換える事が出来るわけである。また、野海山田系の西川現象は、非線形方程式の2つのストークス曲線の交点で、対応する2つの有効双方向2分木が結合することにより新しい有効双方向2分木が出来る事で説明出来る事が判った。線形方程式のストークス幾何に結合による新しい有効双方向2分木が見つければ、指導指針により、非線形方程式に対応する新しいストークス曲線が定義される仕組みである。

本稿の具体例は、有効双方向2分木の様々な変化の様子を実際に理解するのに役立つように構成した。ほぼ1年の間、何度も河合、竹井セミナーに呼

んで頂き、そこで検討された例から主に抜粋したが、セミナーに提出した例は掲載する例の数倍はある。もちろん、筆者個人は、更に数倍は具体例を計算している。主要なパターンは網羅しているのではないと思われる（が、これは正しくないかもしれない）。

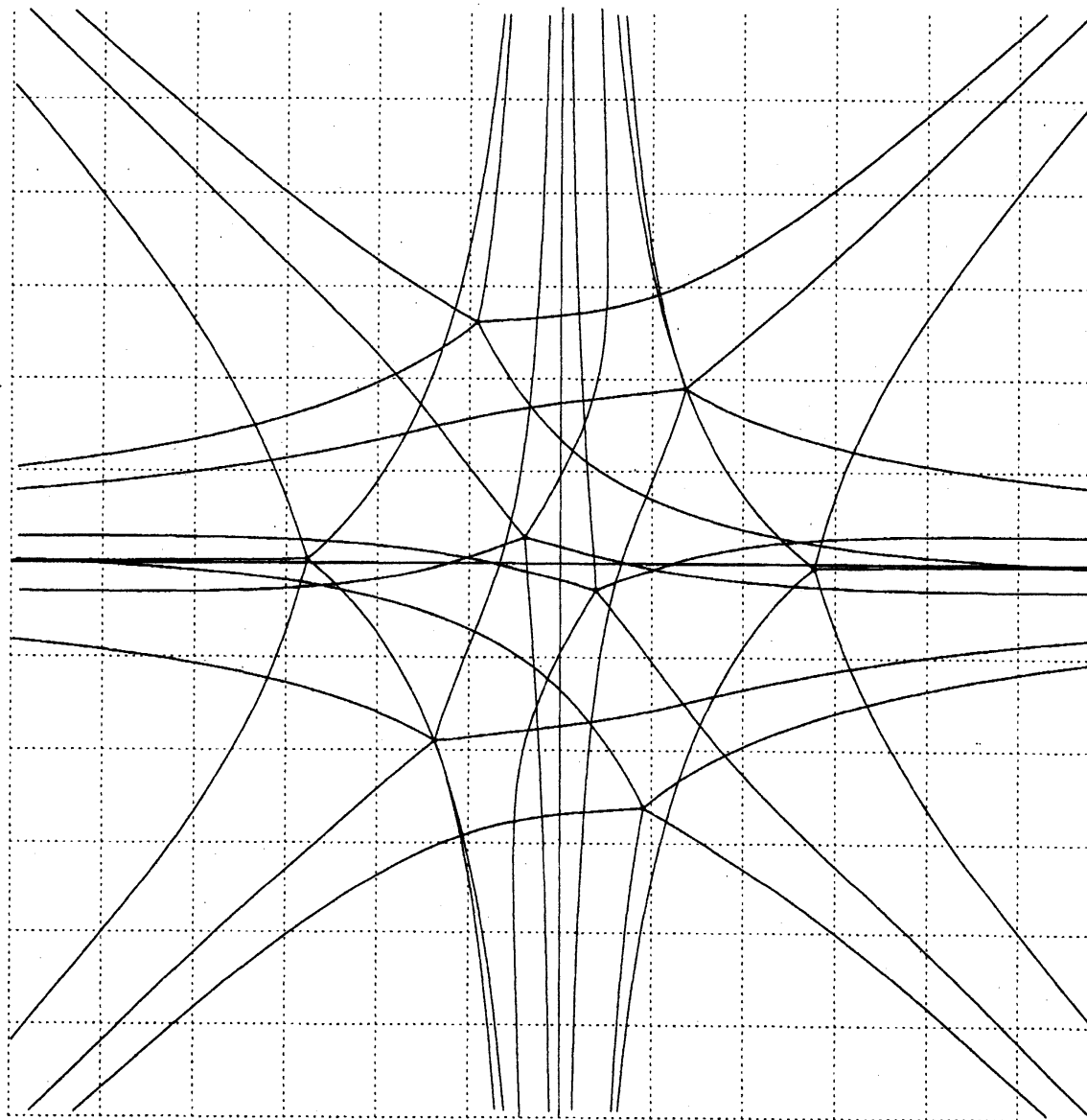
最後に、全くの素人であった筆者を、この非常に興味深い世界を紹介し（忍耐強く）導いて下さった河合先生には感謝してもし尽くせない。また、河合、竹井セミナーでの討論が理論全般の発展に繋がった。むしろ、セミナーでの討論の成果であるともいえる。セミナーの参加者に感謝の意をささげたい。

II. 非線形方程式 NY のストークス幾何

最初に非線形方程式 NY_2, NY_3, NY_4, NY_6 の (形式的な) ストークス曲線の状況を見てみる。なお、 NY のストークス幾何は本来 t 空間上ではなく t 空間上のリーマン面上で定義されている。そのシートの個数、第 1 種、第 2 種変わり点の個数等の代数幾何的性質は青木と筆者 ([AH]) の研究で詳しく判っている。今回掲載した例に関する具体的な数値は以下の通りである。

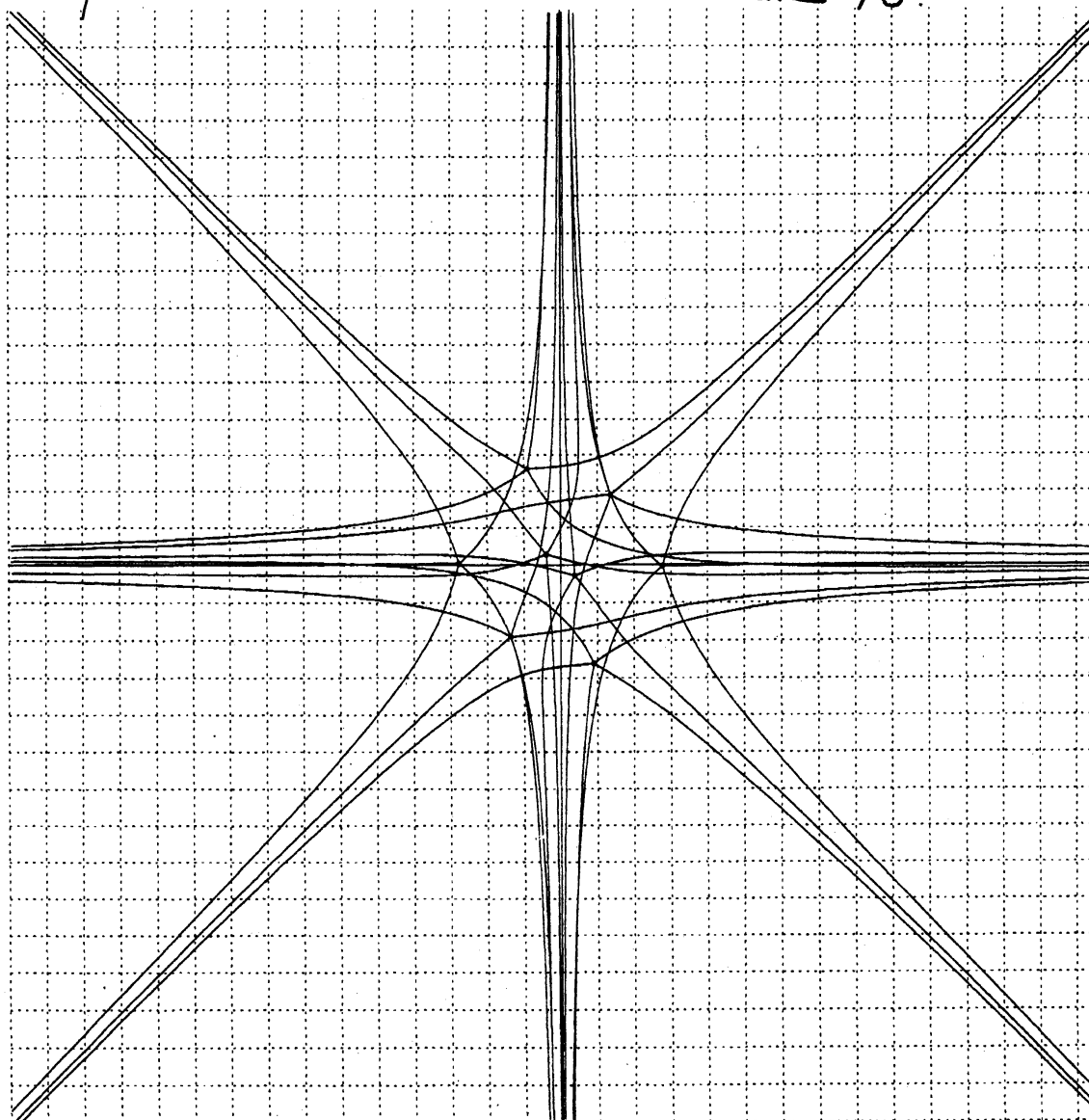
	シートの枚数	第一種変わり点	第二種変わり点	Genus
NY_2	4	8	0	1
NY_3	5	16	0	-
NY_4	16	64	24	17
NY_6	64	384	264	129

↓ 図の番号を表す.
II-1 ① NY2 : turning points は 8 点.

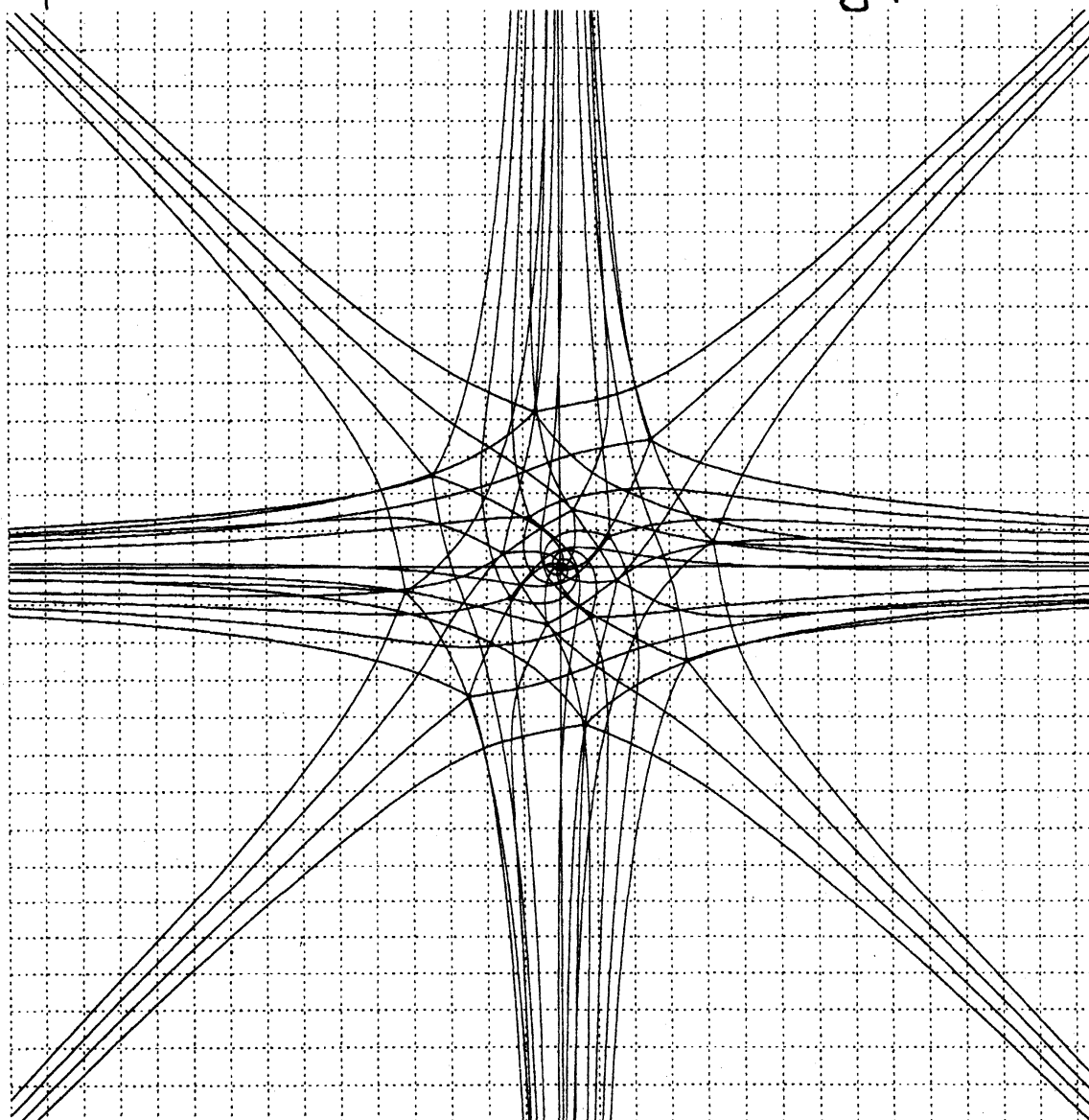


II-2
t-plane

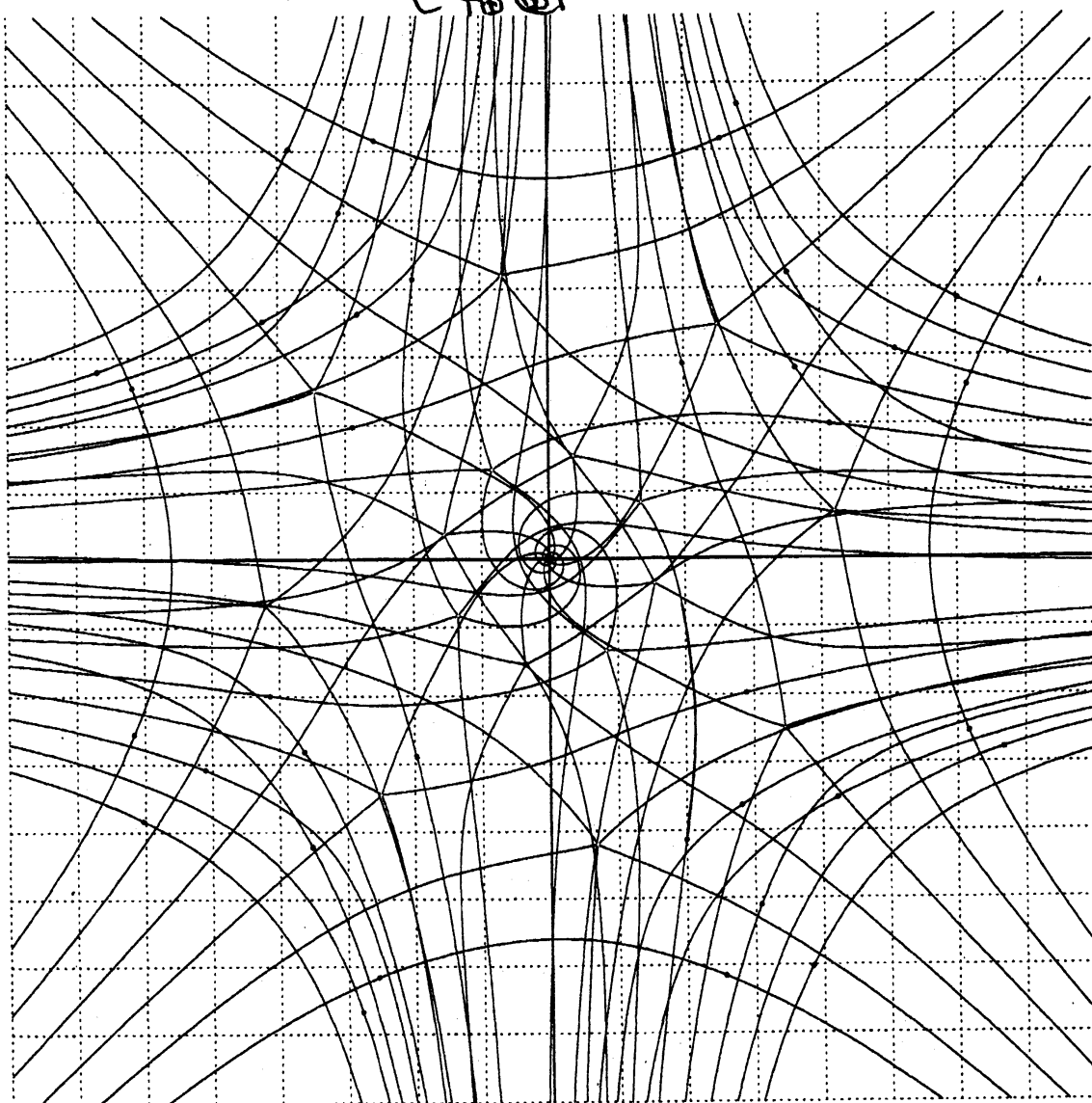
NY2 : Stokes 曲線は $t \rightarrow \infty$ 2.
ある方向に漸近する



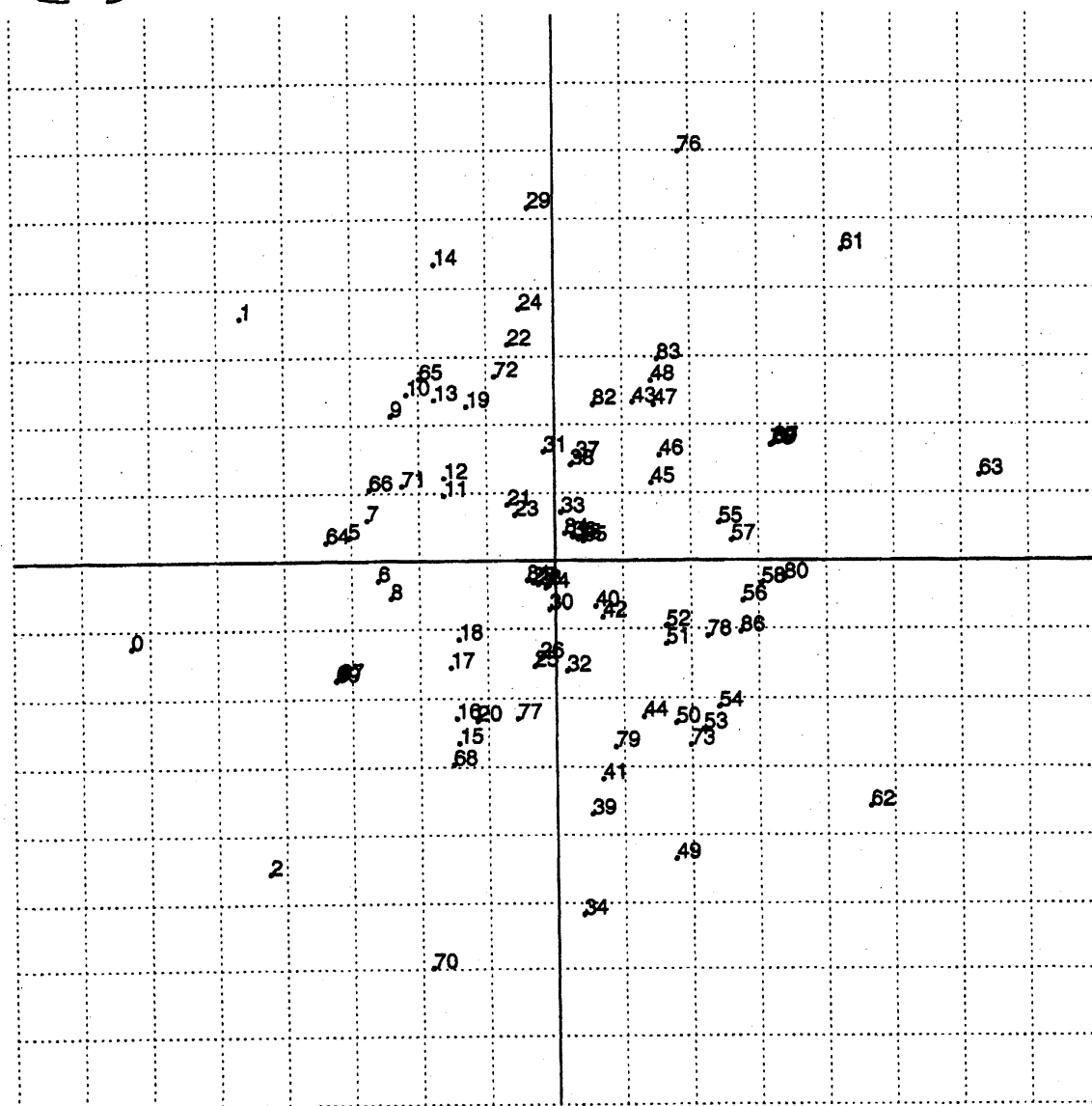
II-3 ② NY3 : 奇数系は原点も
ある種 a turning point



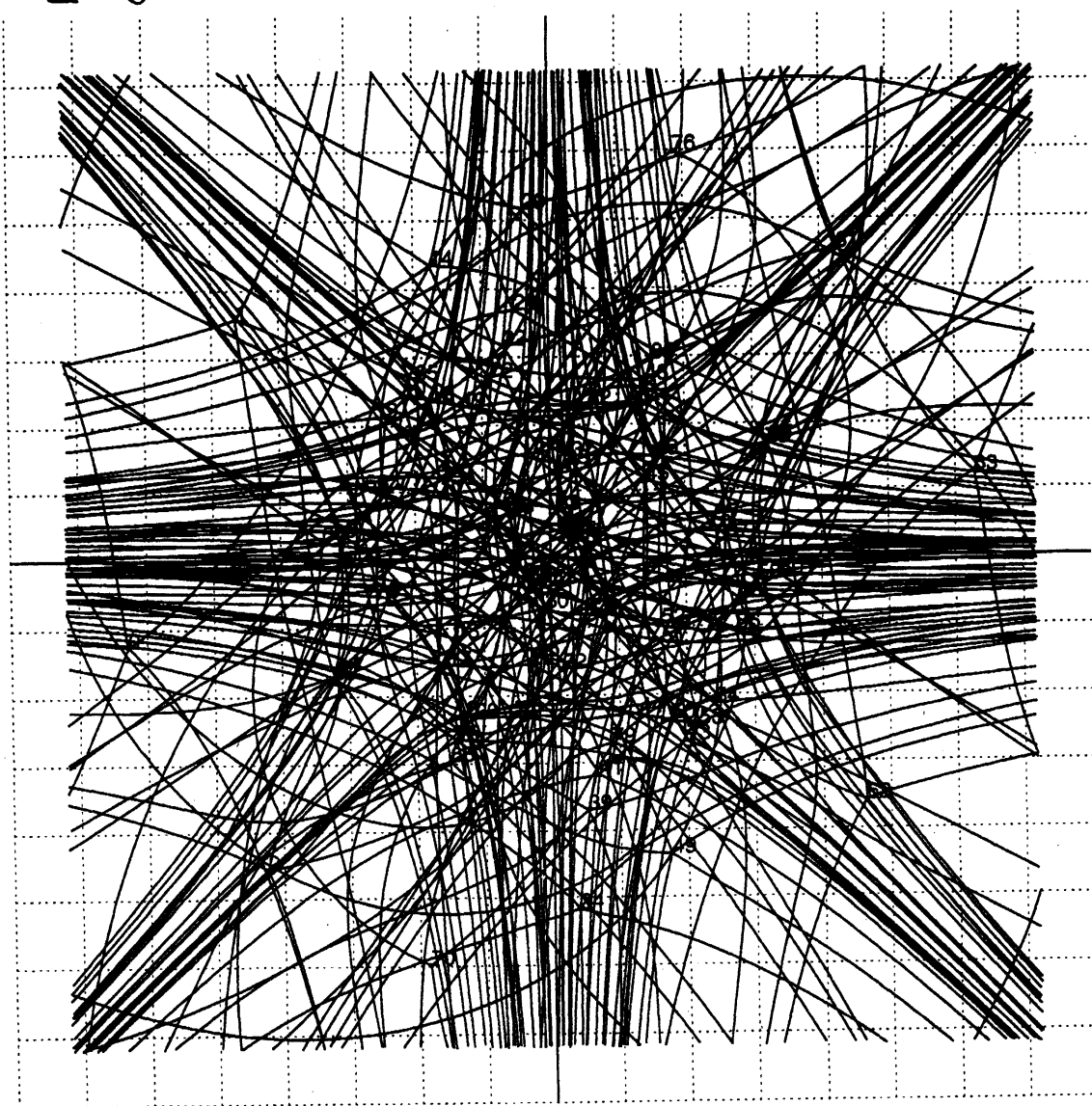
turning pointsを含む
II-4 NY3 : 連結成分以外のstokes曲線
を描画



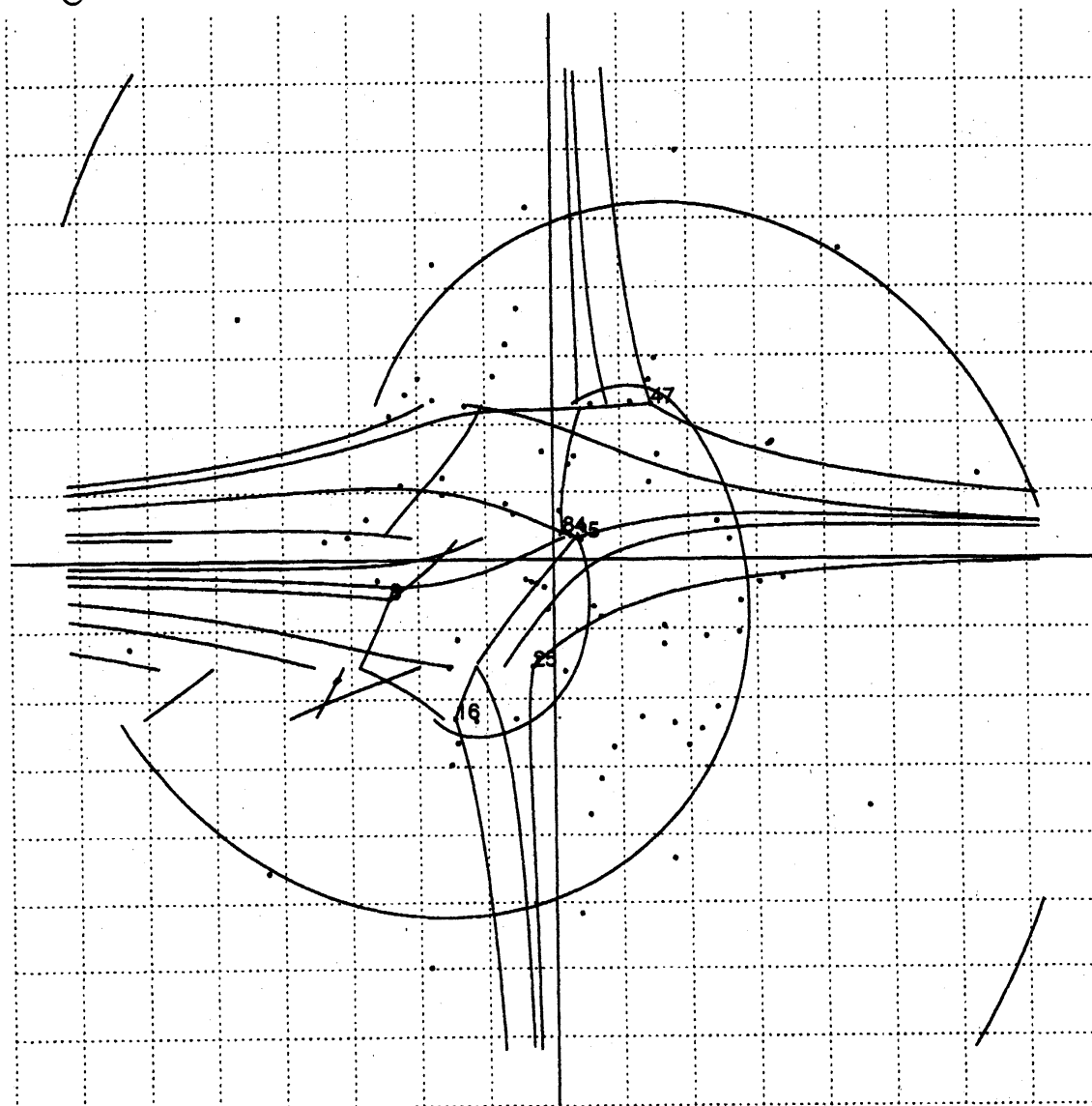
II-5 ③ NY4 : 第1種 0~63
第2種 64~87



II-6 NY4: π^2 Stokes 曲線



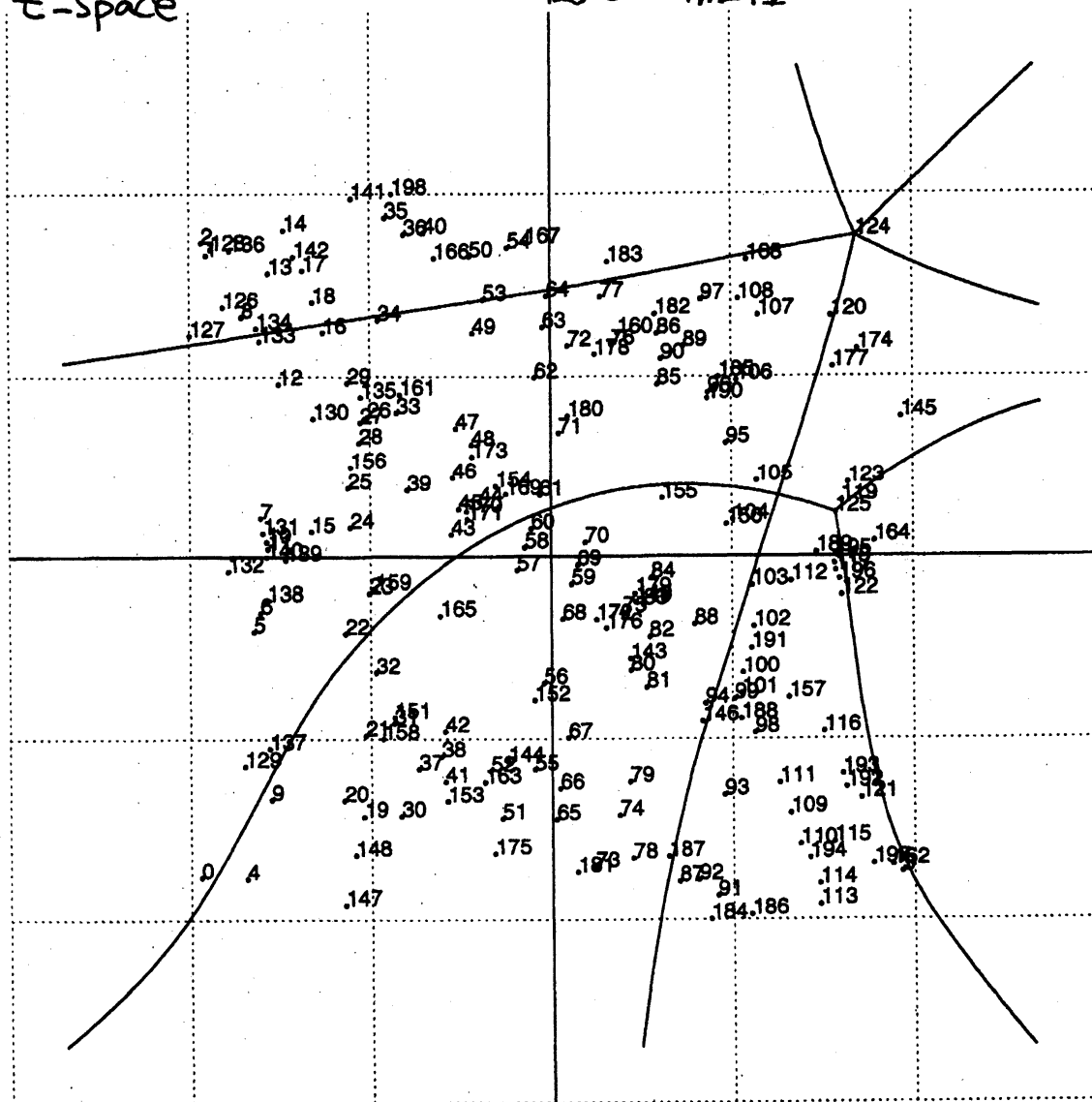
II-7 NY4 : 23 sheet of Stokes 曲線



II-8

t-space

④ NY6 : 土3の乾 団の24
0~124 第1種
125~ 第2種



III. 有効双方向 2 分木の例

有効双方向 2 分木の例を以下に 2 つのせる。

最初の例は、 NY_4 のあるストークス曲線上を変わり点に近い点から遠くなる点を何点かとして、最初位数 2 の有効双方向 2 分木であったものが位数 5 の有効双方向 2 分木にまで成長する変化を追跡している。途中、ストークス曲線から点をはずし少し上の点と少し下の点での 2 分木の変化の様ものせてある。この時、有効双方向 2 分木がいくつかの有効単方向 2 分木に分解し、その開放端点上のストークス曲線が上下で不連続変化する様子が判る。この事は指導指針の意味でストークス曲線上の点である事を示唆するのは言うまでもない。

2 番目の例は、西川現象によって有効双方向 2 分木の結合が発生し、新しい有効双方向 2 分木が出来る例である。2 つの非線形方程式のストークス曲線に対応する位数 3 の 2 つの有効双方向 2 分木がストークス曲線の交点上で枝点を共有した状態から、西川現象のおきる新しいストークス曲線上 S に結合による位数 4 の有効双方向 2 分木が出来る様子が判る。

また、 S の左右の点での有効双方向 2 分木の変化も追跡してある。この場合、最初の例と同じで、有効双方向 2 分木がいくつかの有効単方向 2 分木に分解し、その開放端点上のストークス曲線が左右で不連続変化する様子が判る。

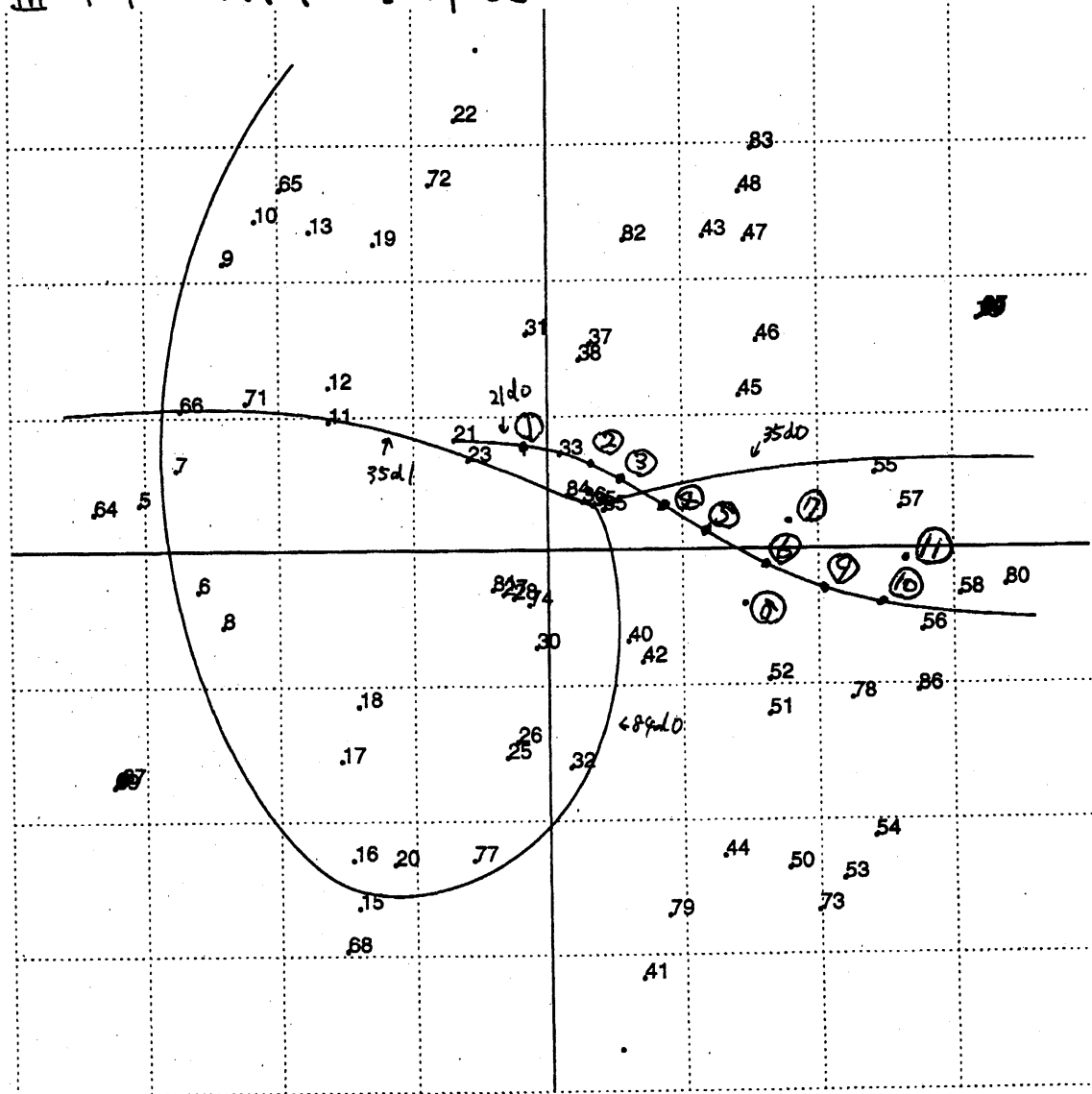
なお、線形方程式系 NYL のストークス幾何のデータは以下の通り。

	行列のサイズ	単純変わり点	二重変わり点
NYL_2	3x3	2	1
NYL_3	4x4	3	1
NYL_4	5x5	4	2
NYL_6	7x7	6	3

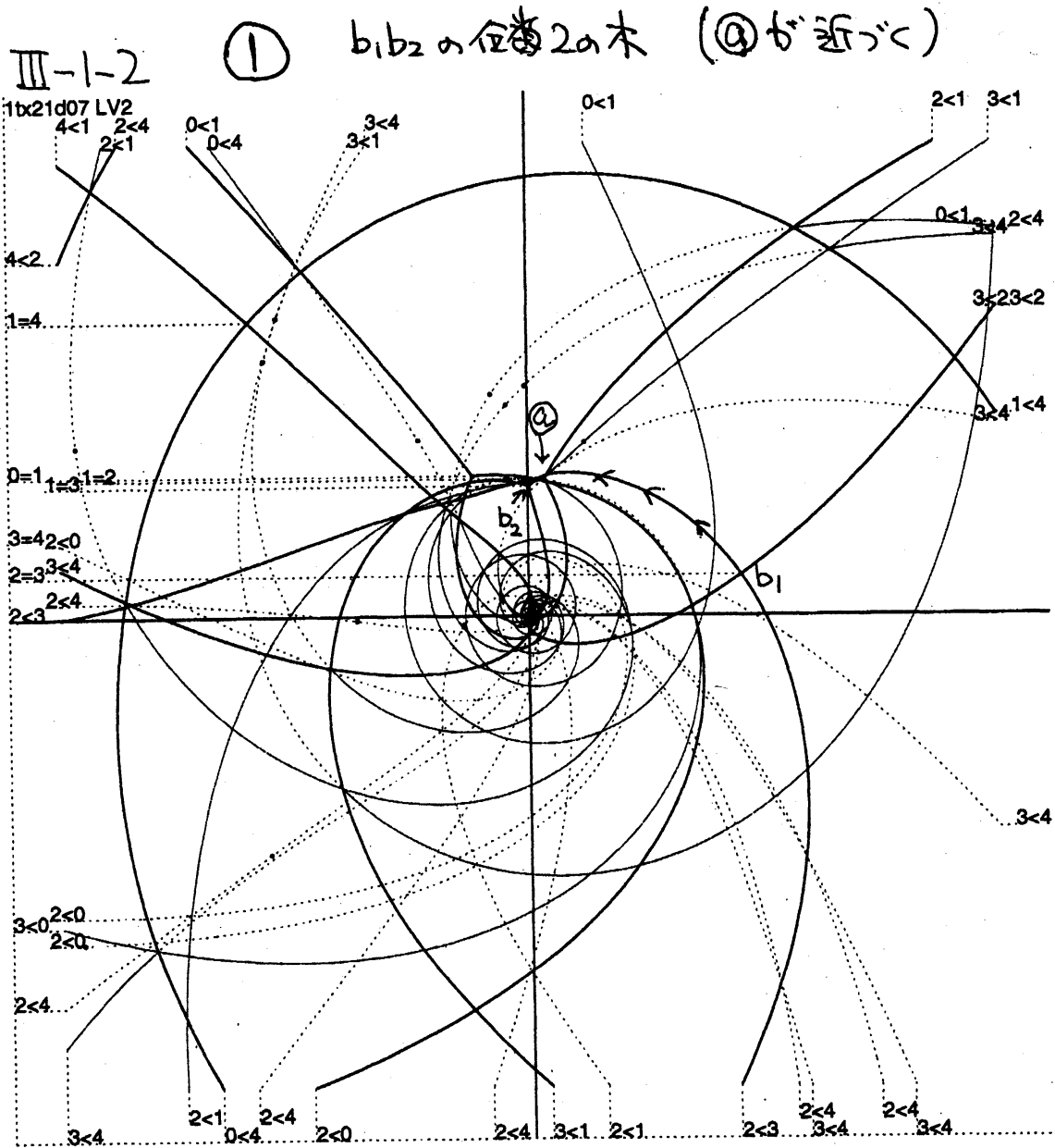
木の成長

↓ 図の番号をます。

III-1-1 NY4 t-space



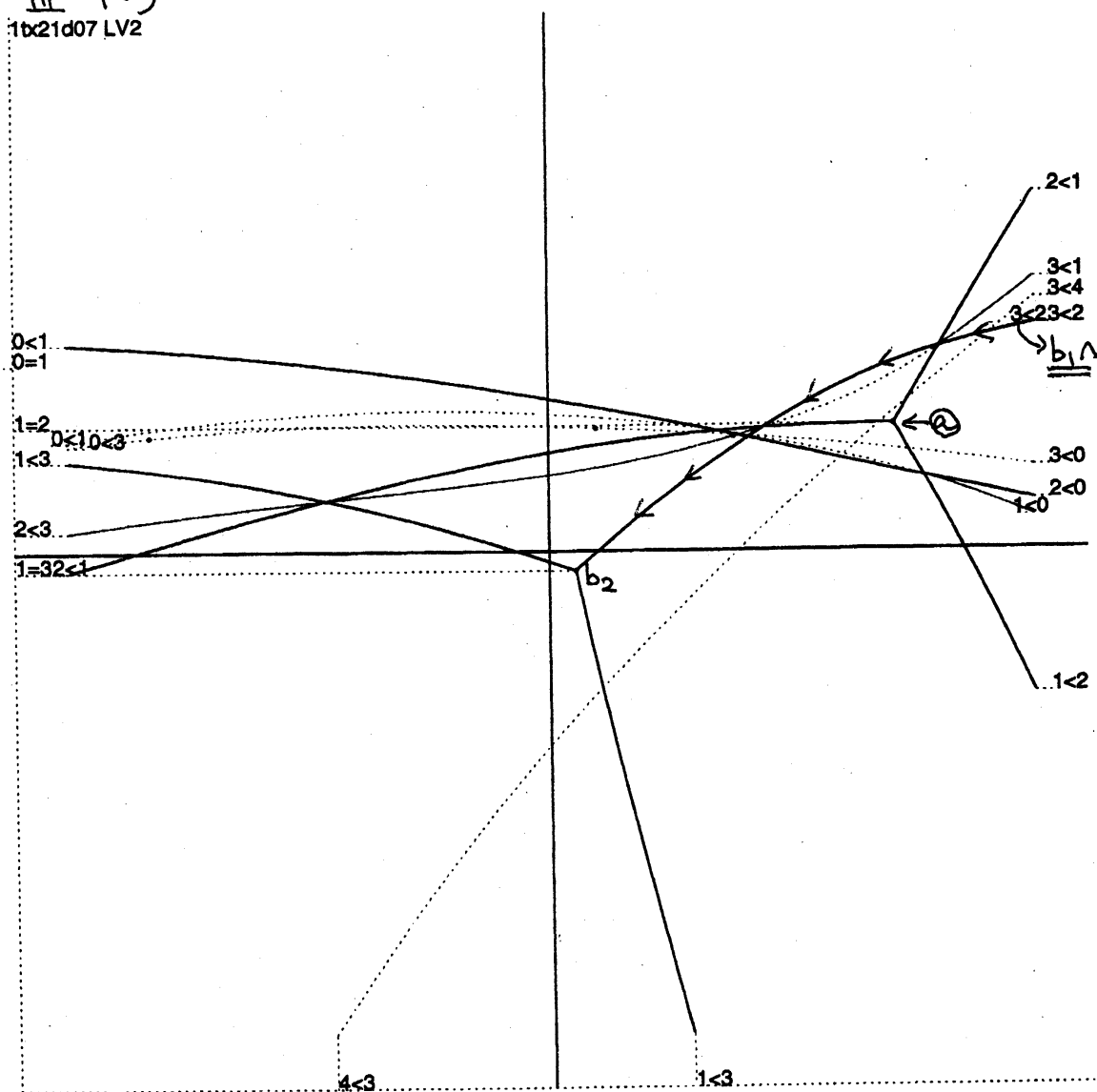
以下 ① ~ ⑪ における Stokes 数 の
変化をみる。



次の三つの拡大図参照の事 $b_2 \rightarrow b_1$

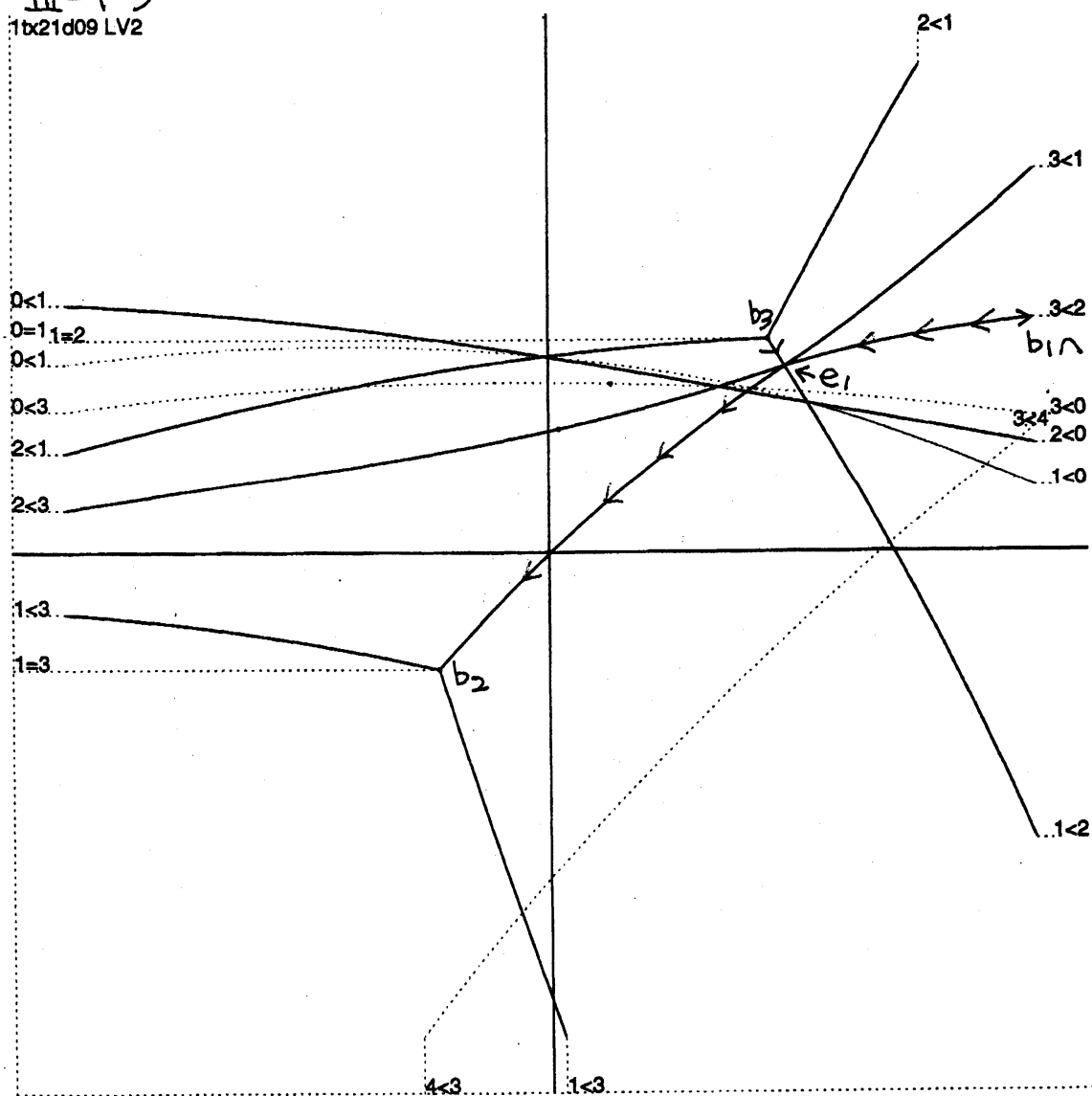
Ⅲ-1-3 ① 拉大图

1b21d07 LV2

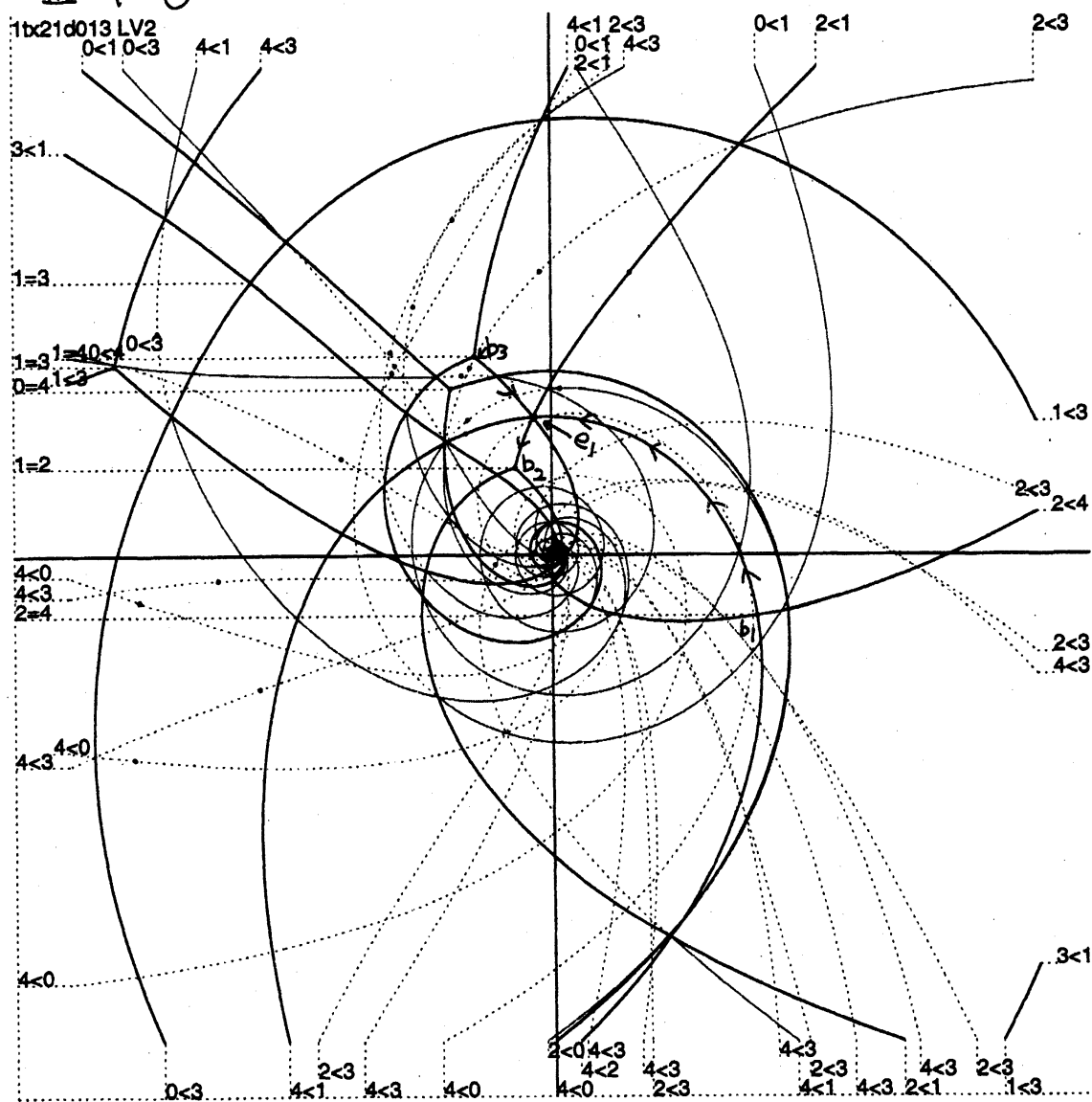


III-1-5 ② 拡大図

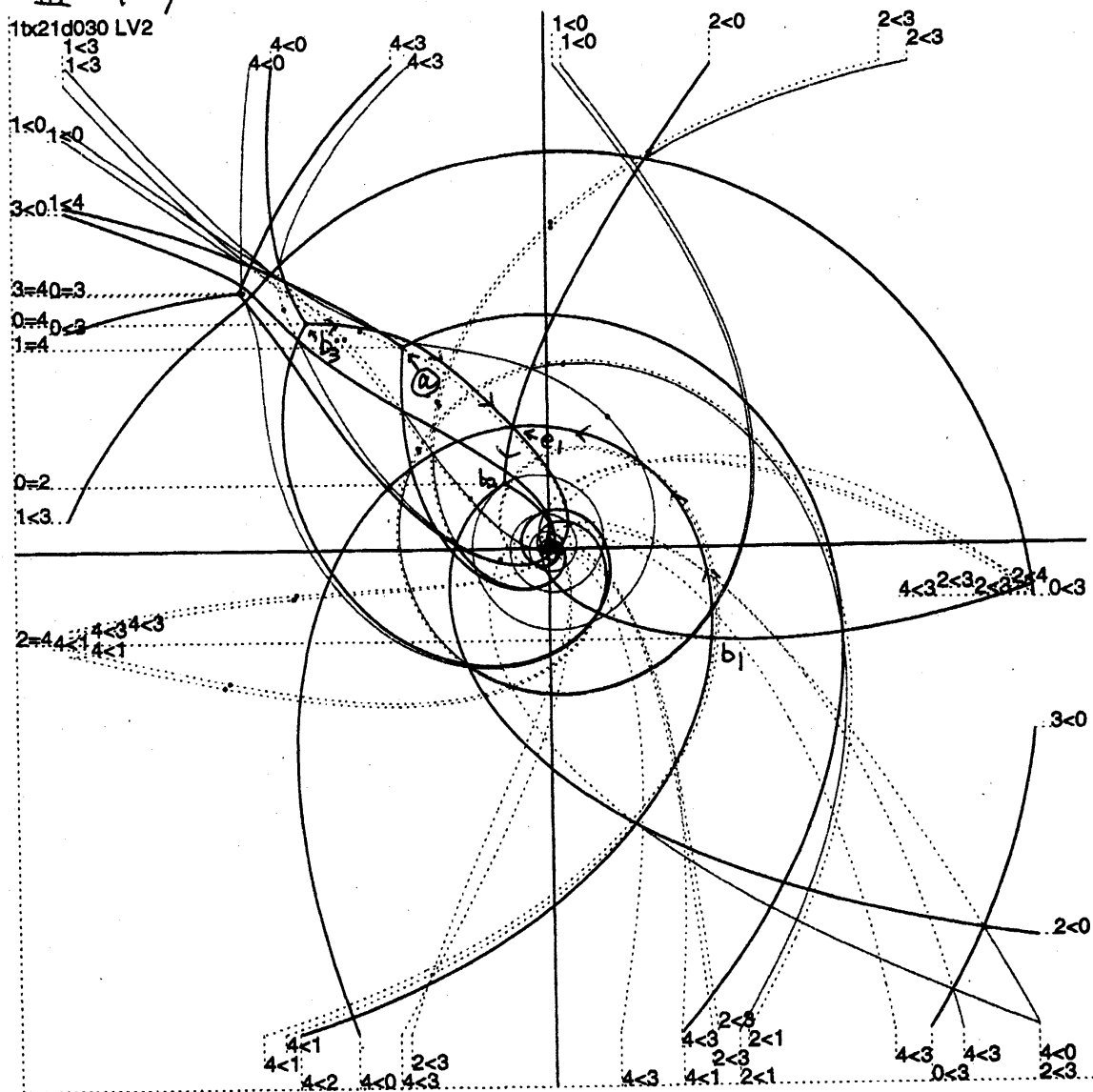
1tx21d09 LV2



III-1-6

③ $b_1 \sim b_3$ 位置

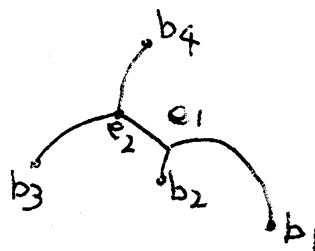
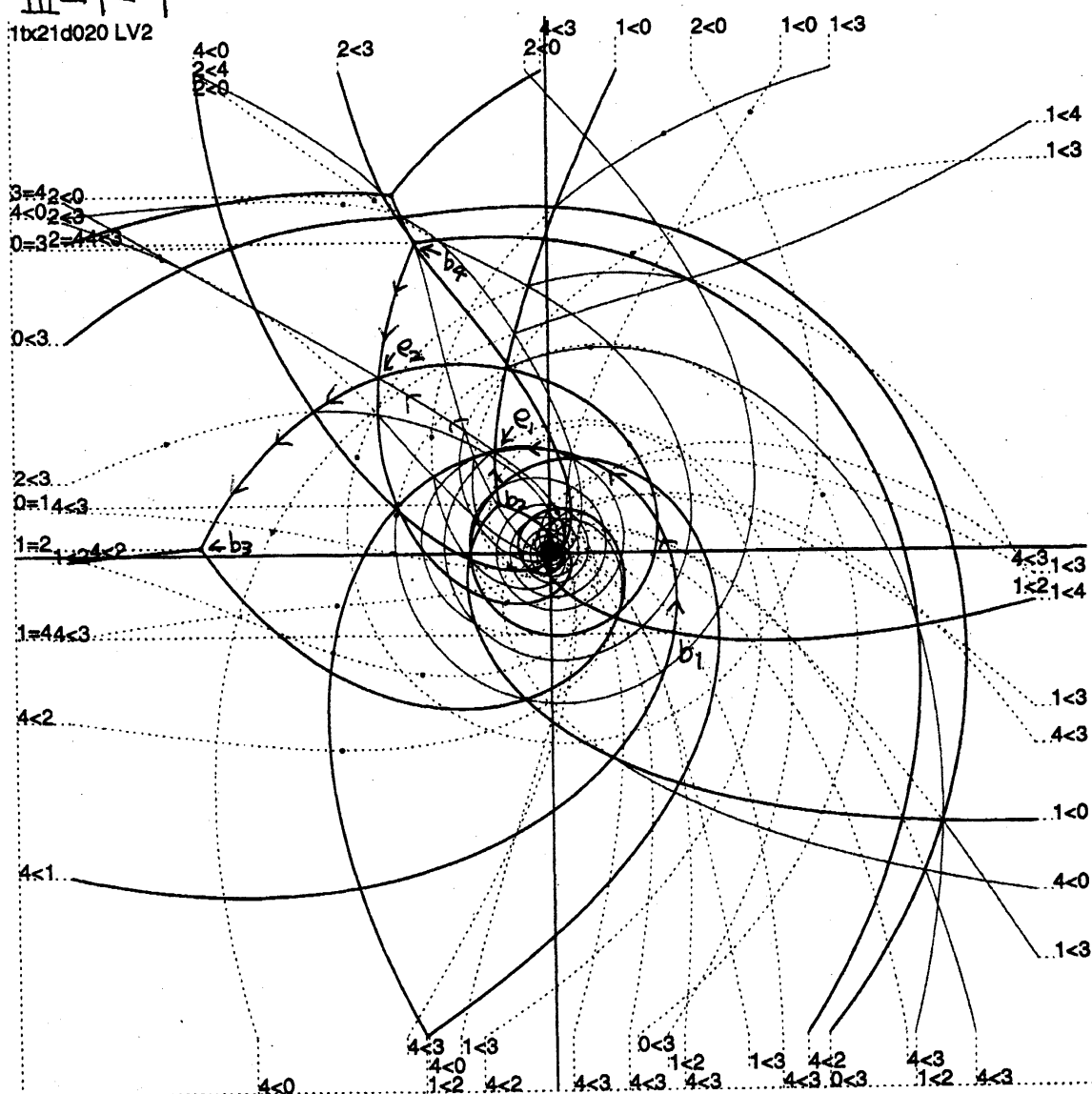
III-1-7 ④ $b_1 \sim b_3$ 位数3 (④が近づく)

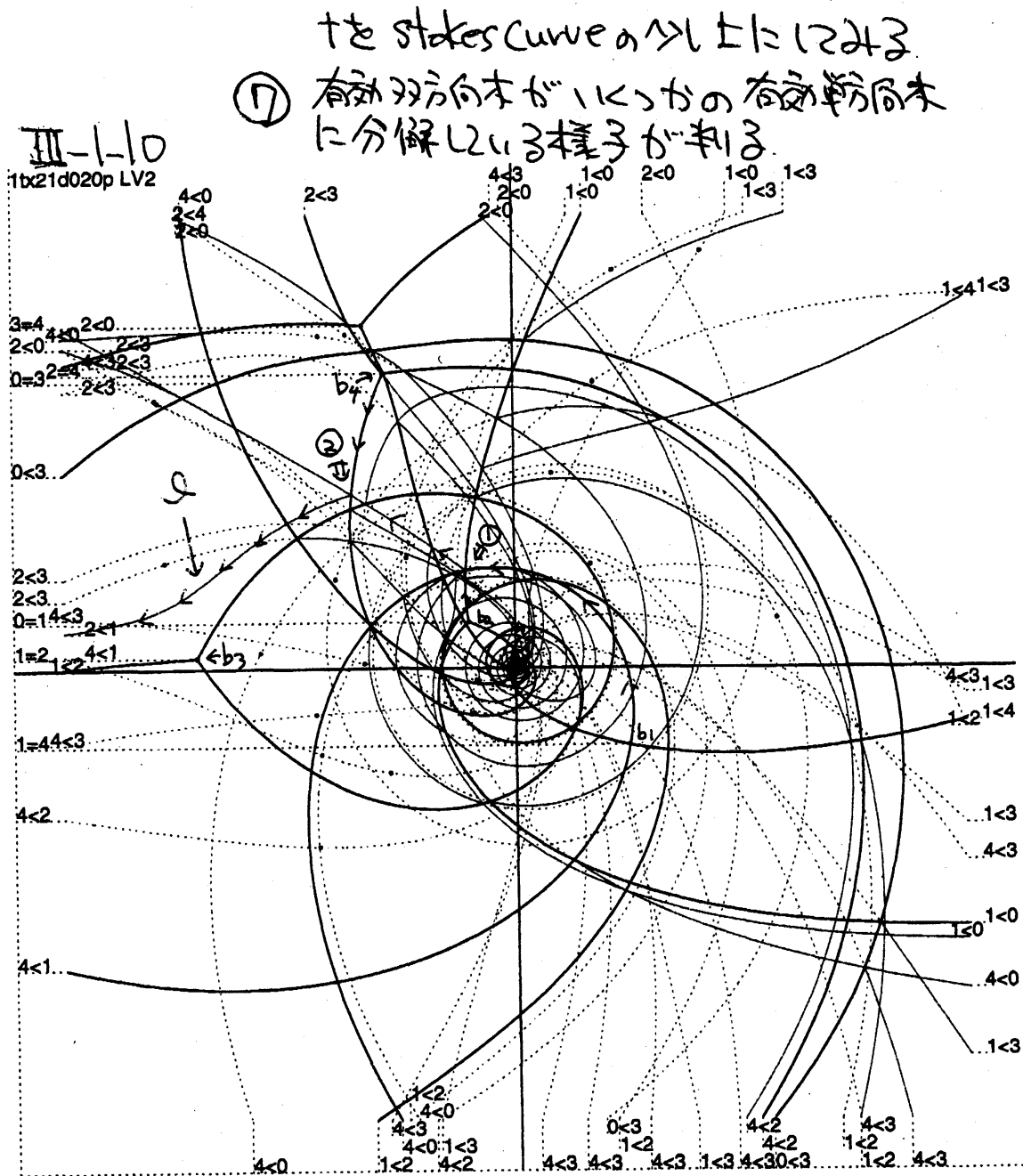


III-1-9

⑥ $b_1 \sim b_4$ 位类 4

11b21d020 LV2





$b_1 \geq b_2$ が ①
① $\times b_4$ が ②

Q は b_3 の上を通る ②
次の ⑤ 参照

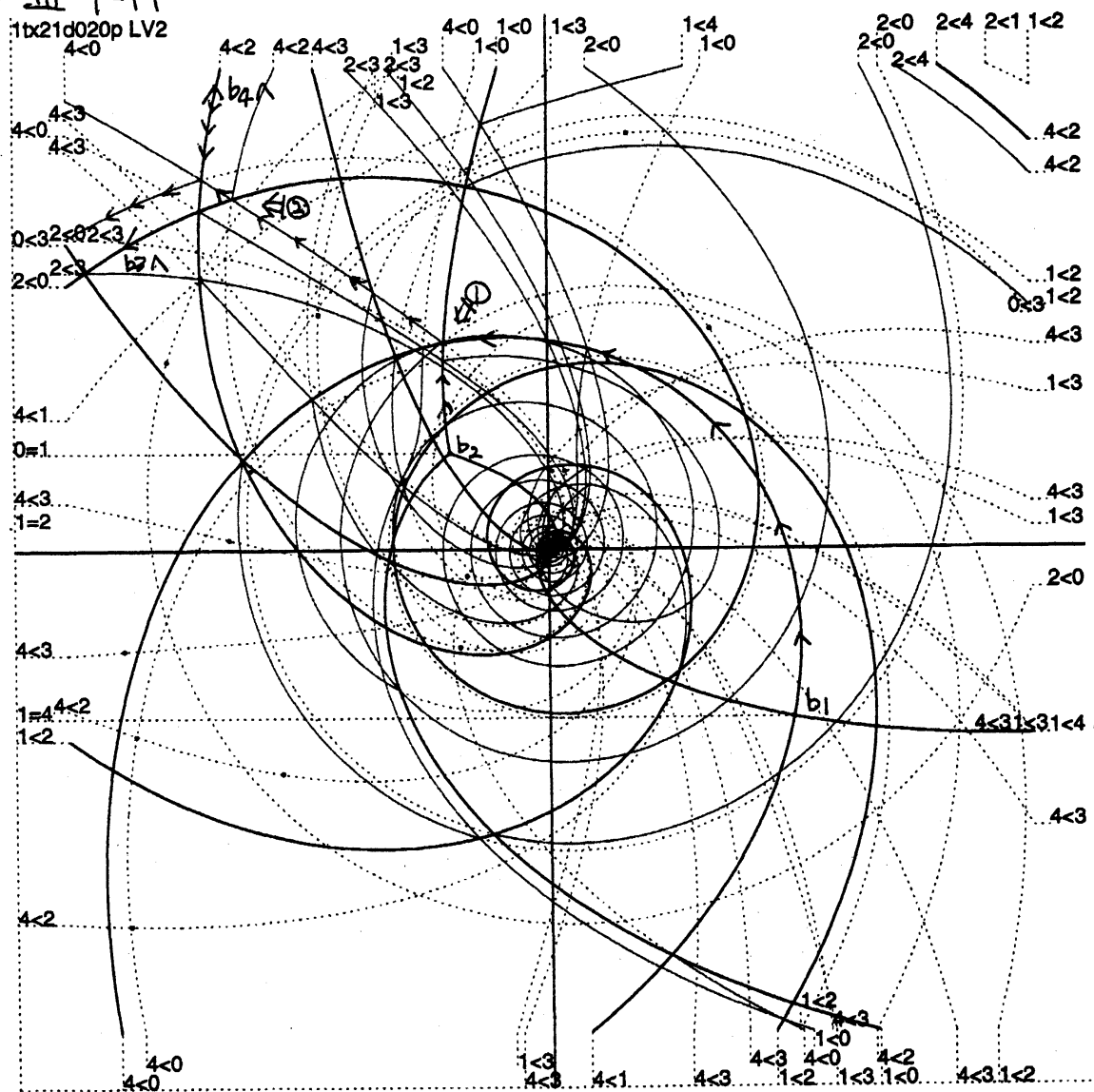
3=4

$$0=3^2=4$$

⑦ 拡大図

III-1-11

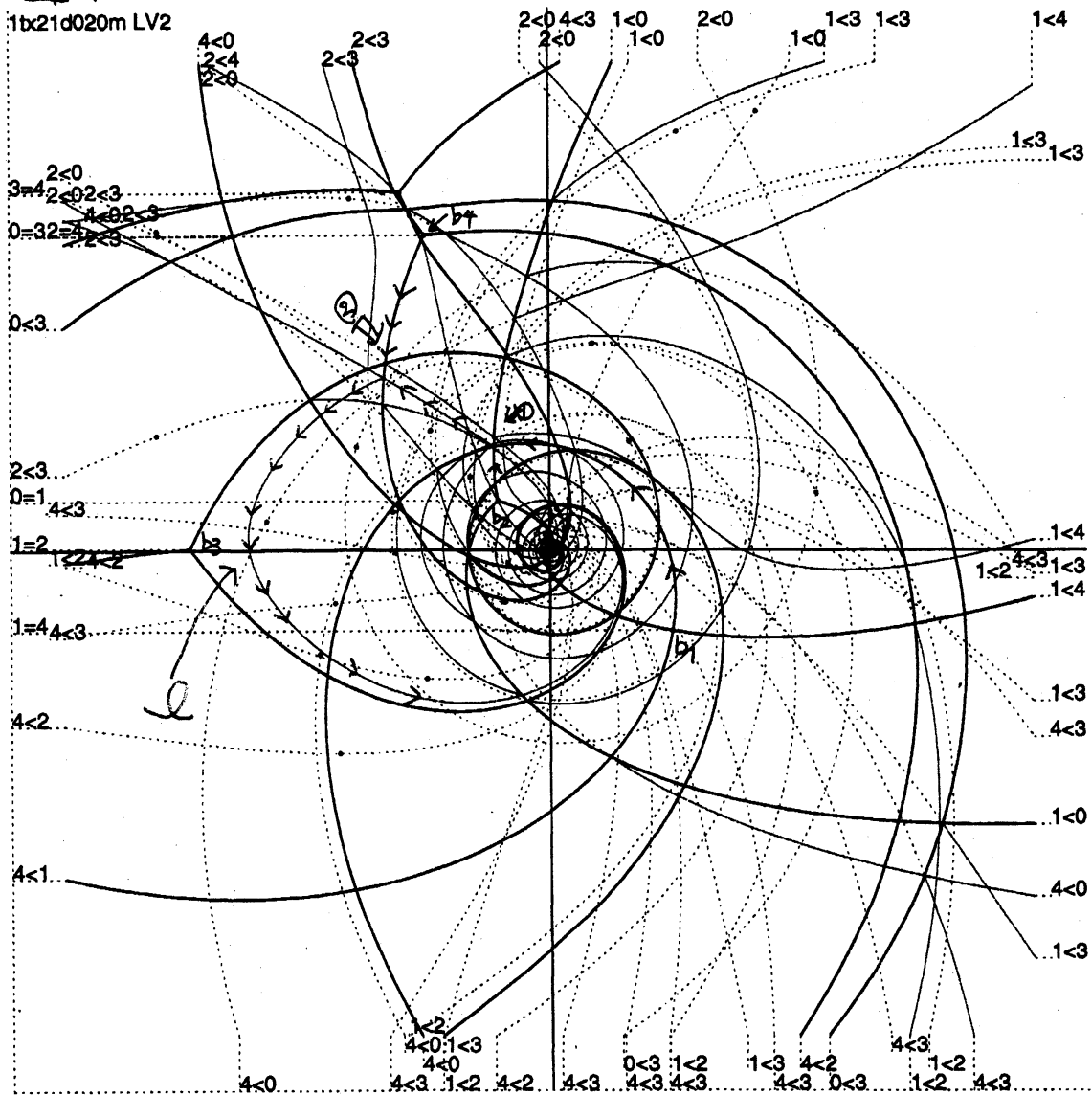
1tx21d020p LV2
4<0



⑧ λ を以下にした場合
やはりいくつかの有効単方向本に分解する

II-1-12

1b21d020m LV2

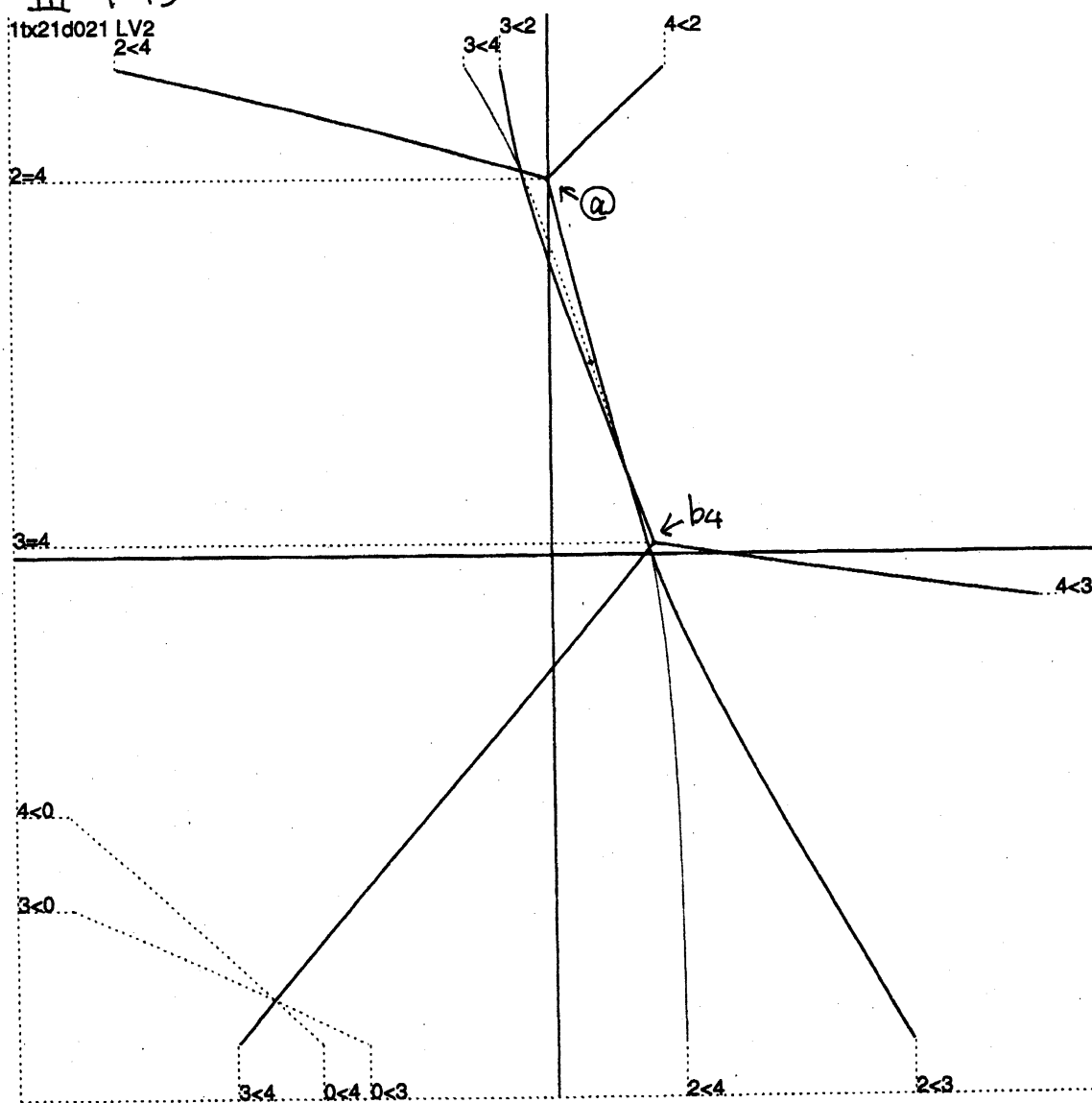

$$\begin{aligned} b_1 &\succeq b_2 \text{ } b'_1 \text{ } s \text{ } \textcircled{1} \\ \textcircled{1} &\succeq b_4 \text{ } b'_1 \text{ } s \text{ } \textcircled{2} \end{aligned}$$

l_1 は b_3 の右支通の2113

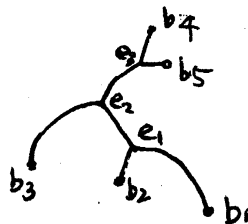
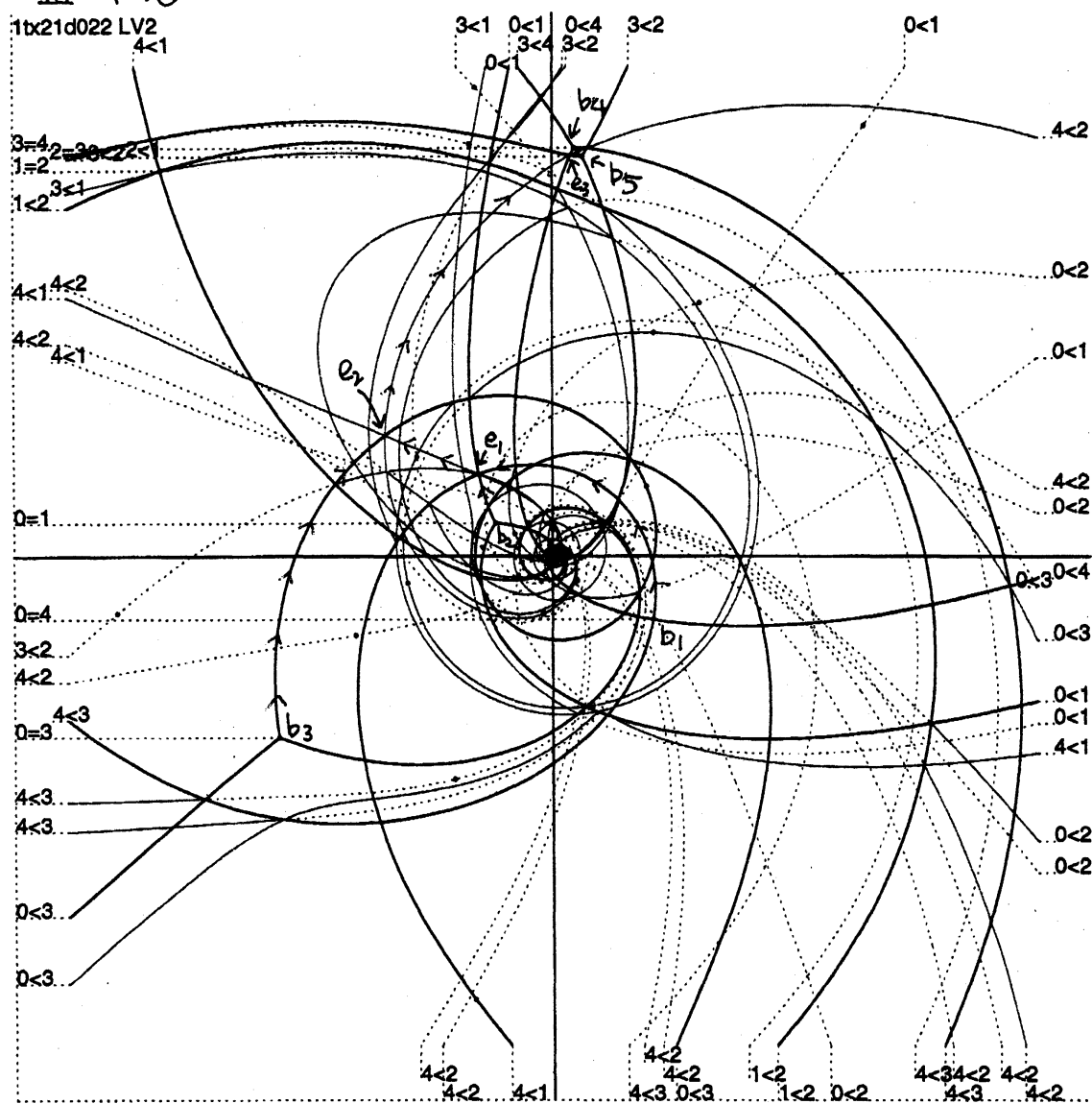
⑨ 抗図

III-1-15

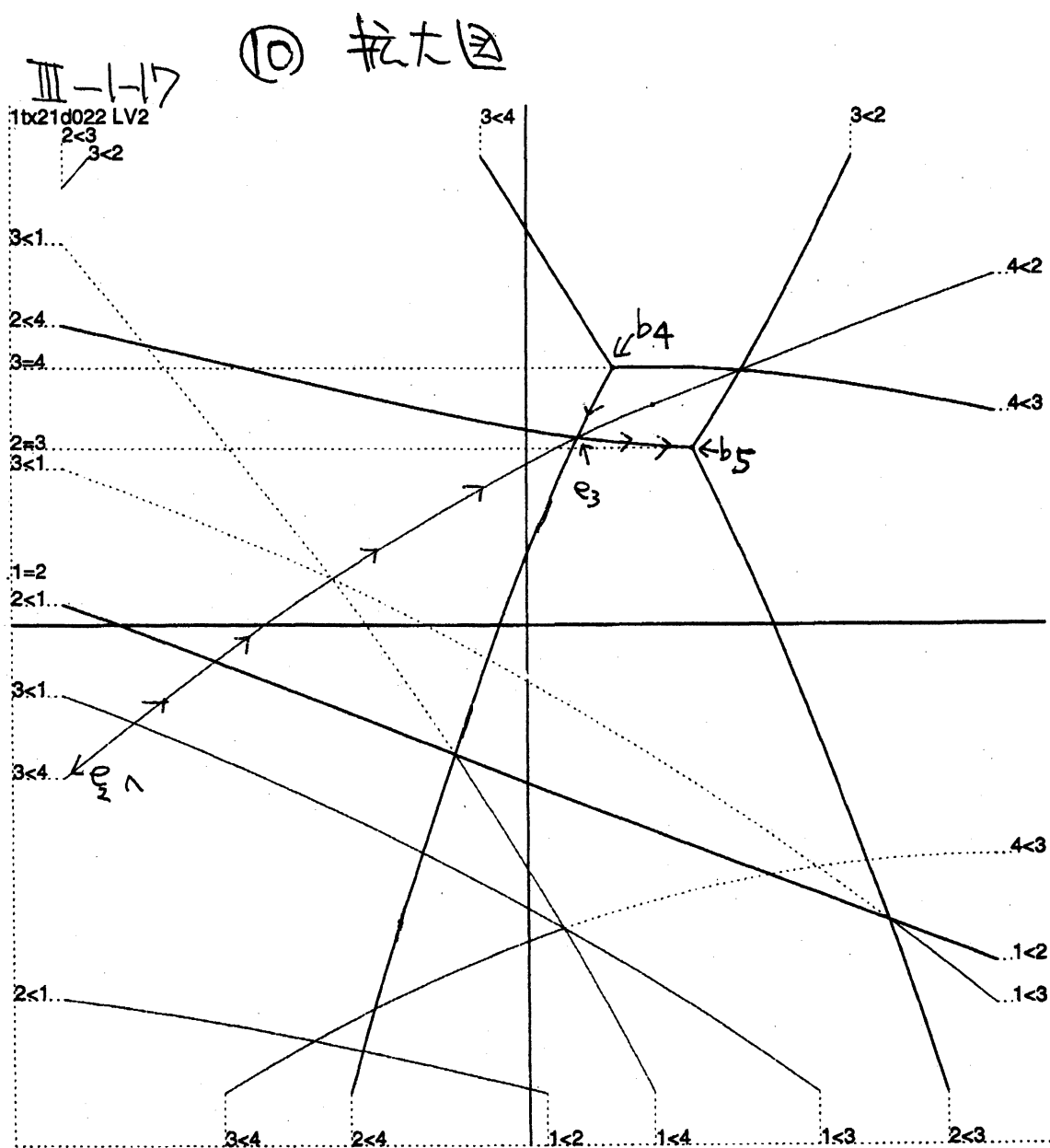
1b21d021 LV2
2<4



III-1-16

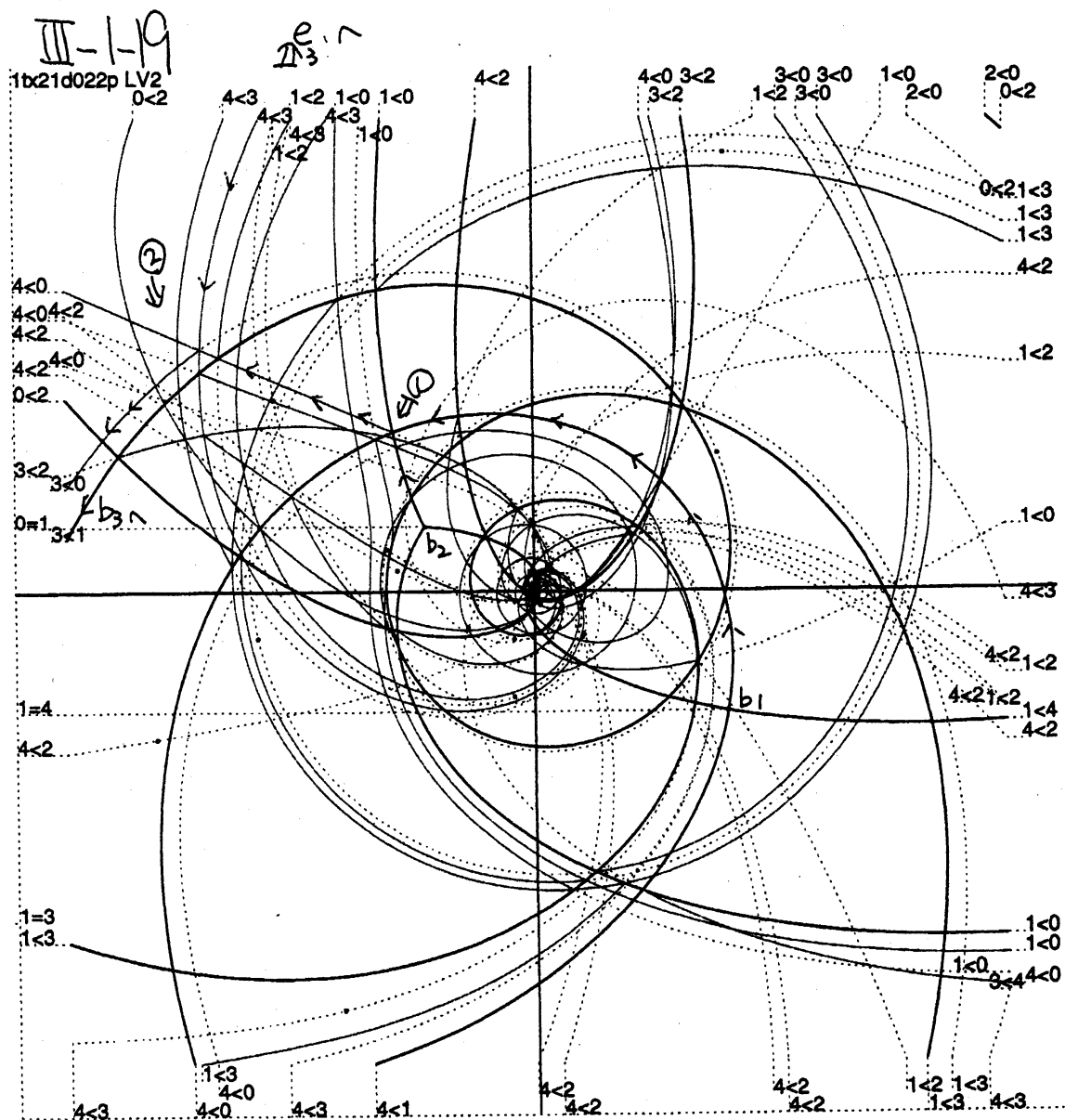
⑩ $b_1 \sim b_5$ 位置 5 に σ_2 

e_1, e_2, e_3 - 分岐点
 $b_1 \sim b_5$ - 枝

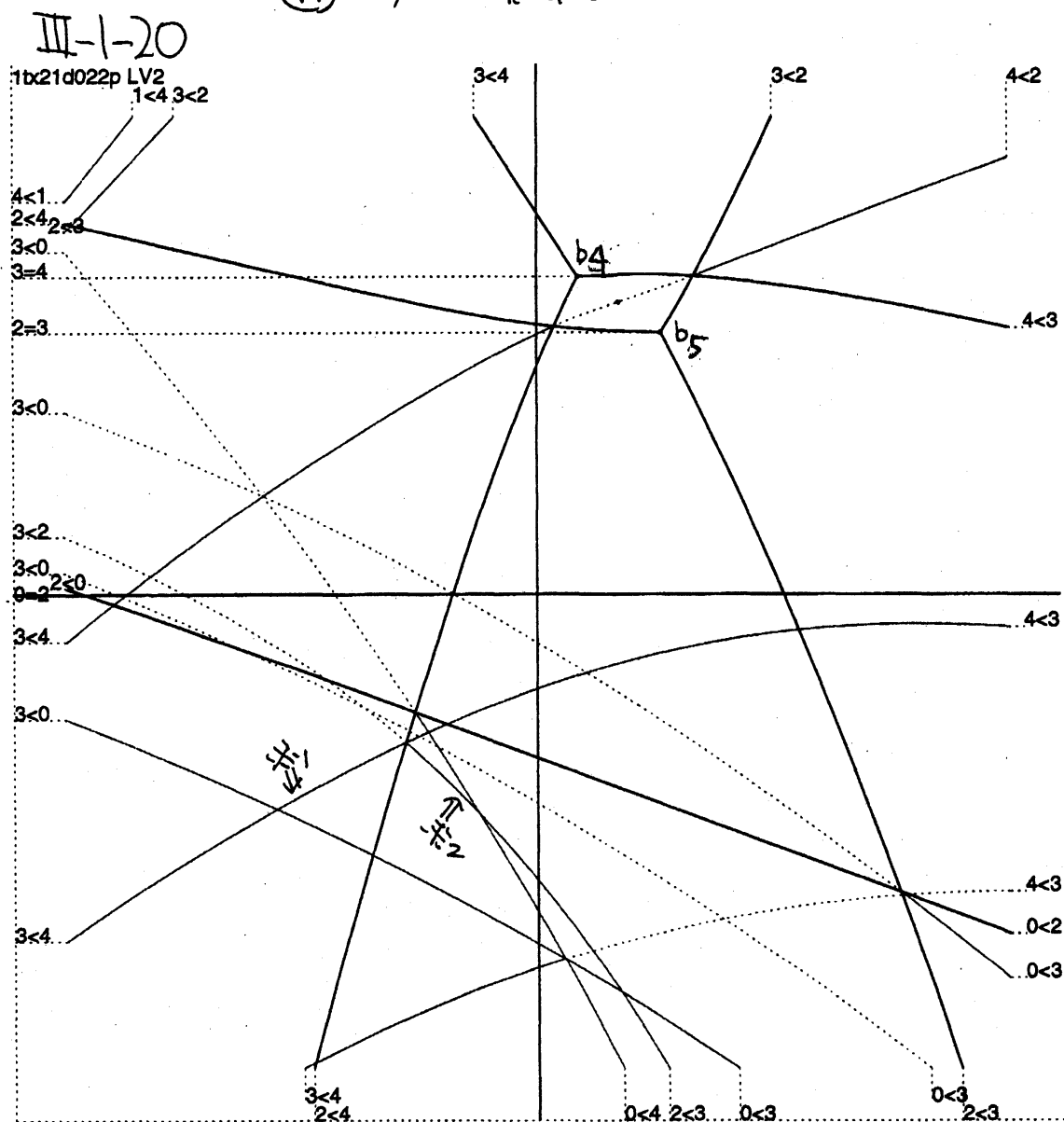


0=2

① 拡大図

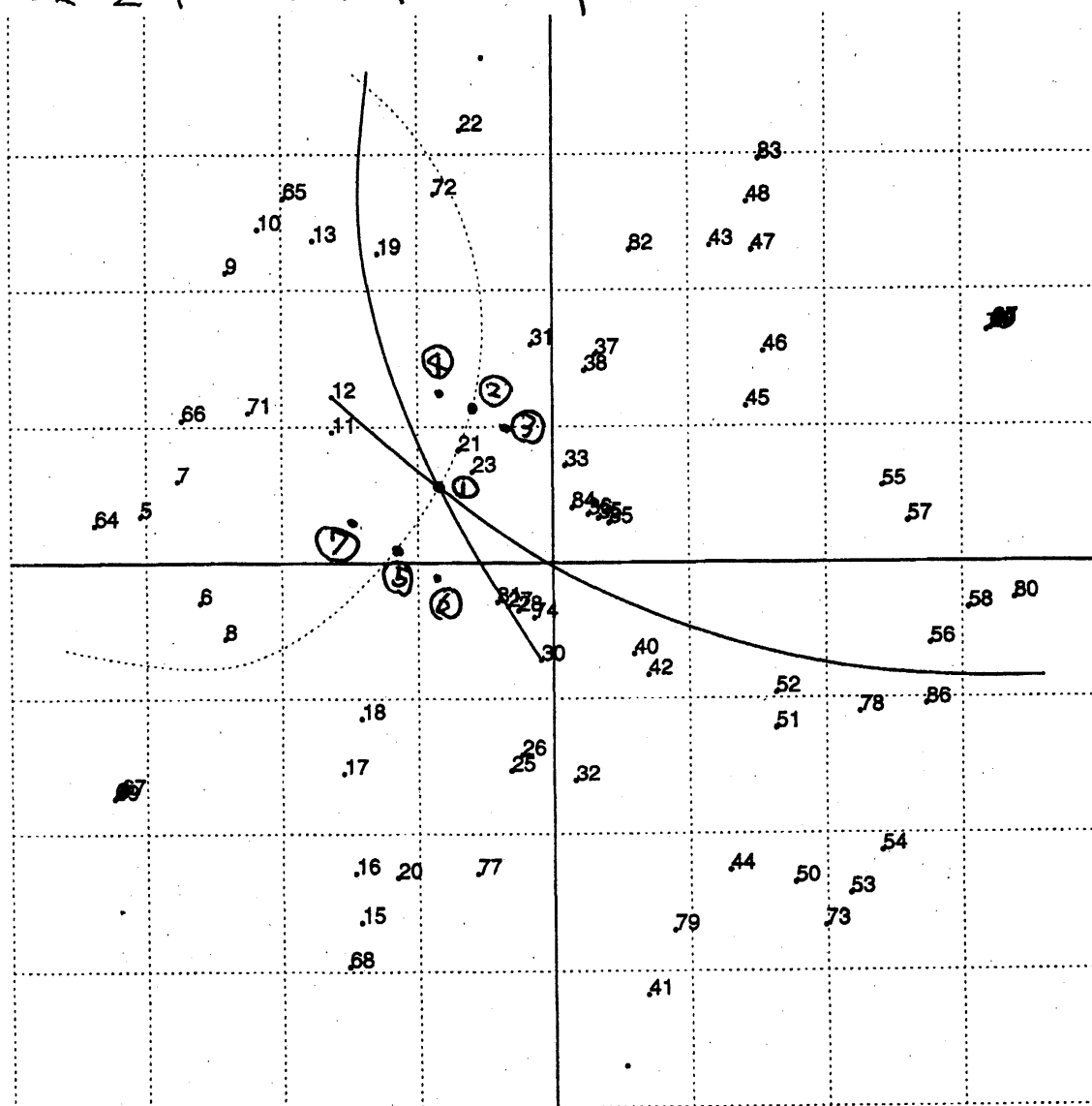


⑪ 更に拡大



西川現象, 木の結合

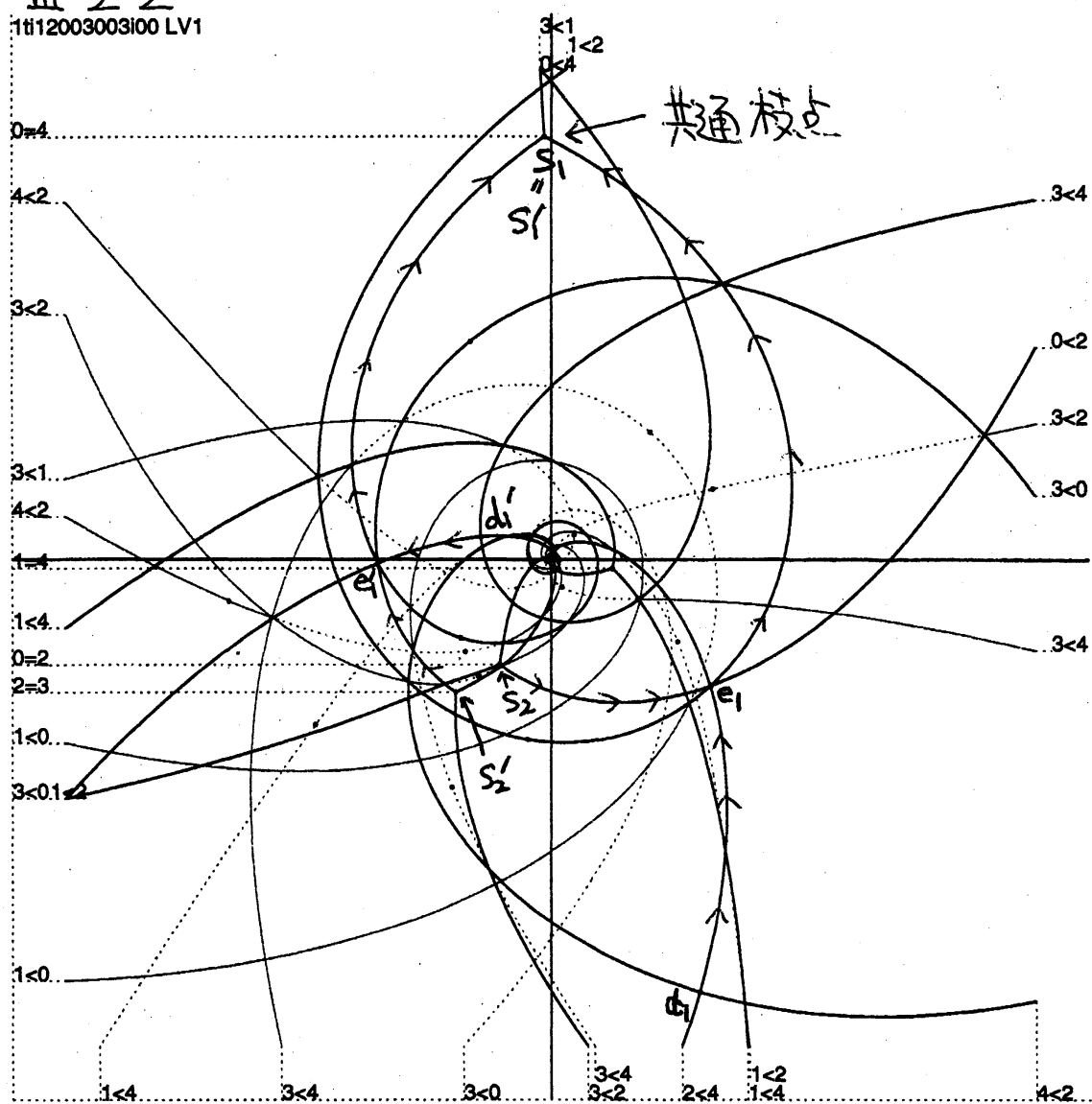
III-2-1 NY4 t-space



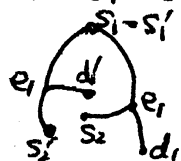
①と②の木が結合した時, 新たな曲線上の双方の木をみる.

III-2-2
11112003003100 LV1

①



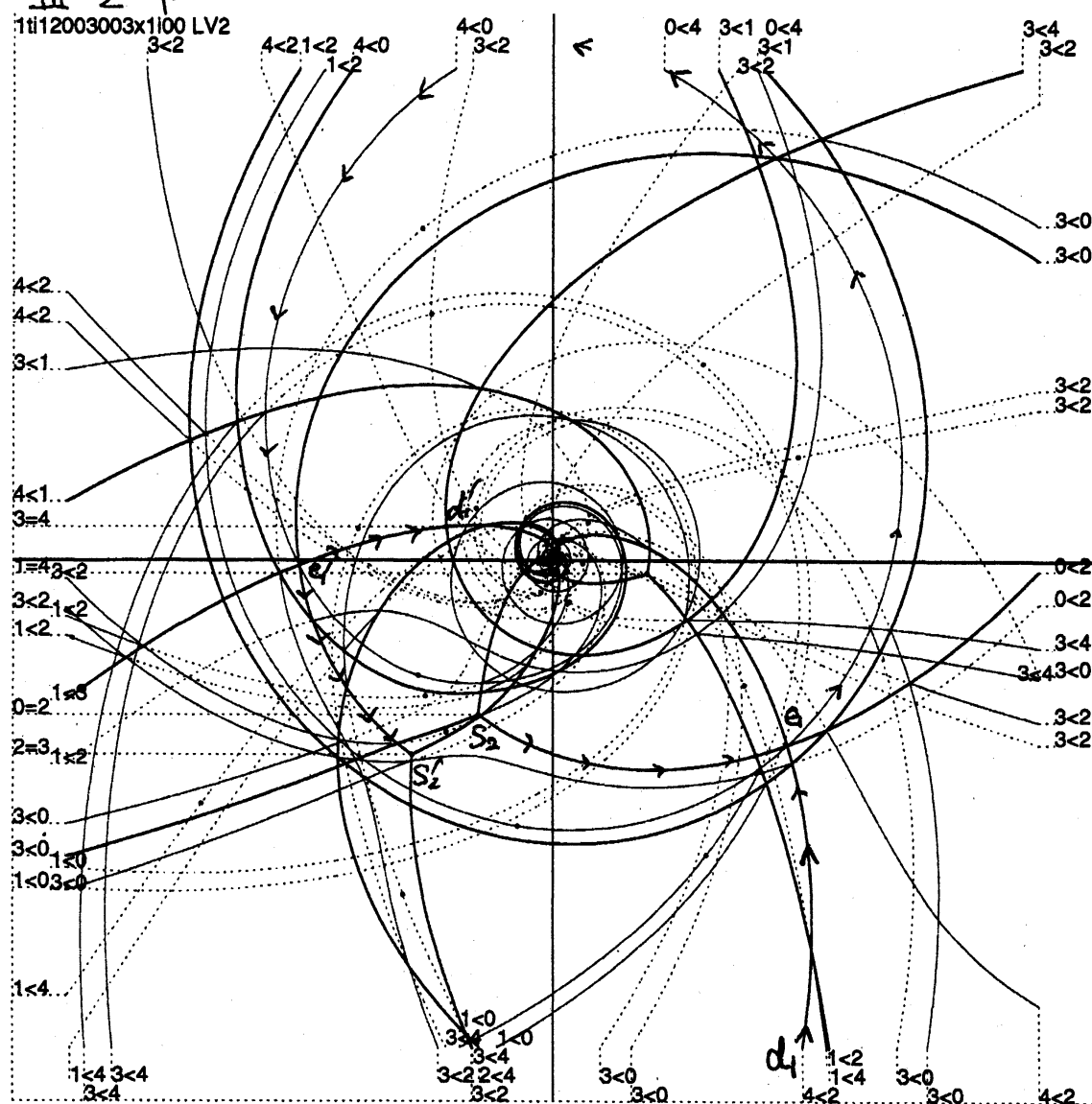
$d_1 S_1 S_2$ / の2つの本が $S_1 = S_1'$ を通る2, 1, 3
 $d_1' S_1' S_2'$



0=4

III-2-4

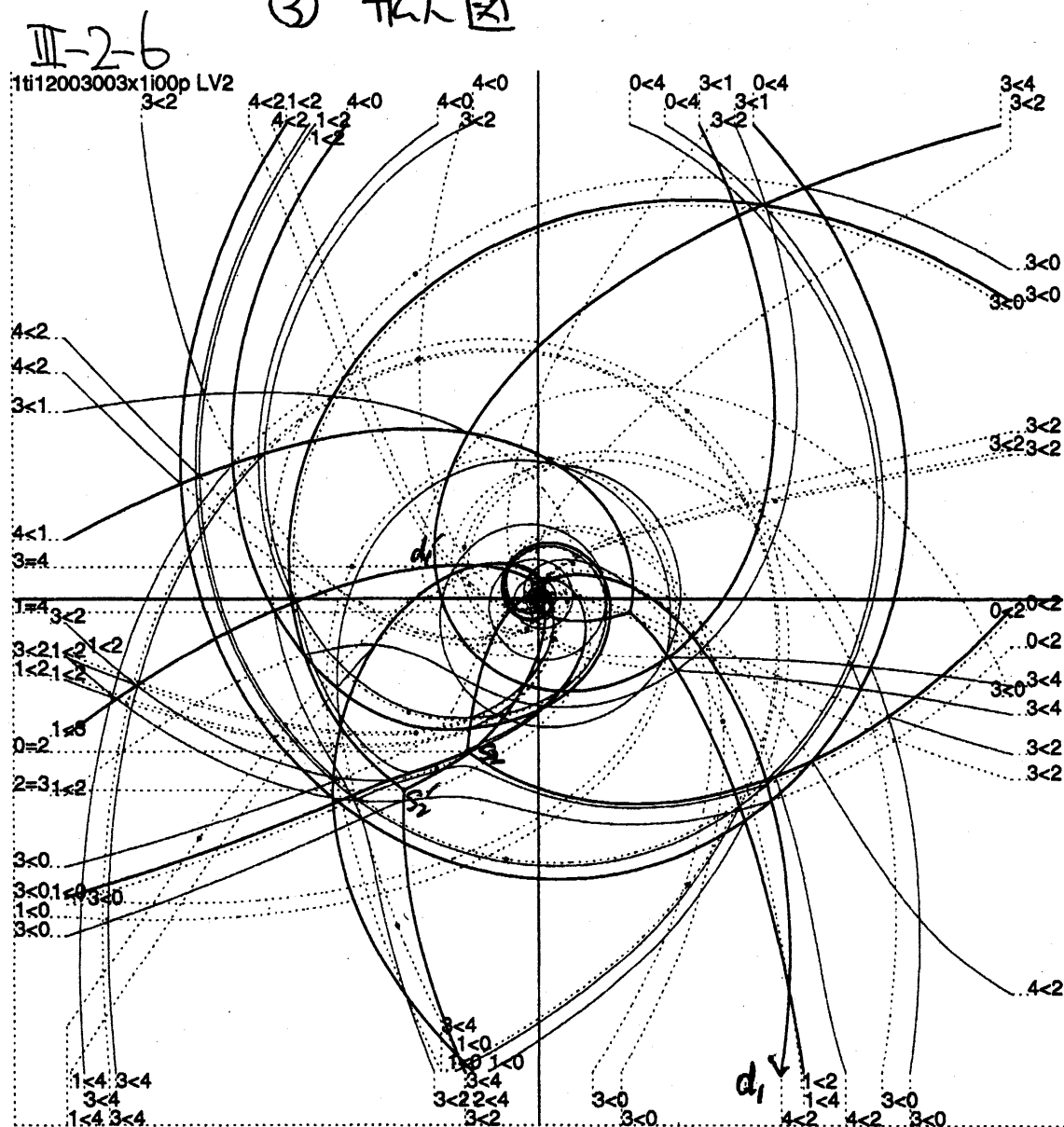
② 抗大



2=4

0=4

③ 拡大図



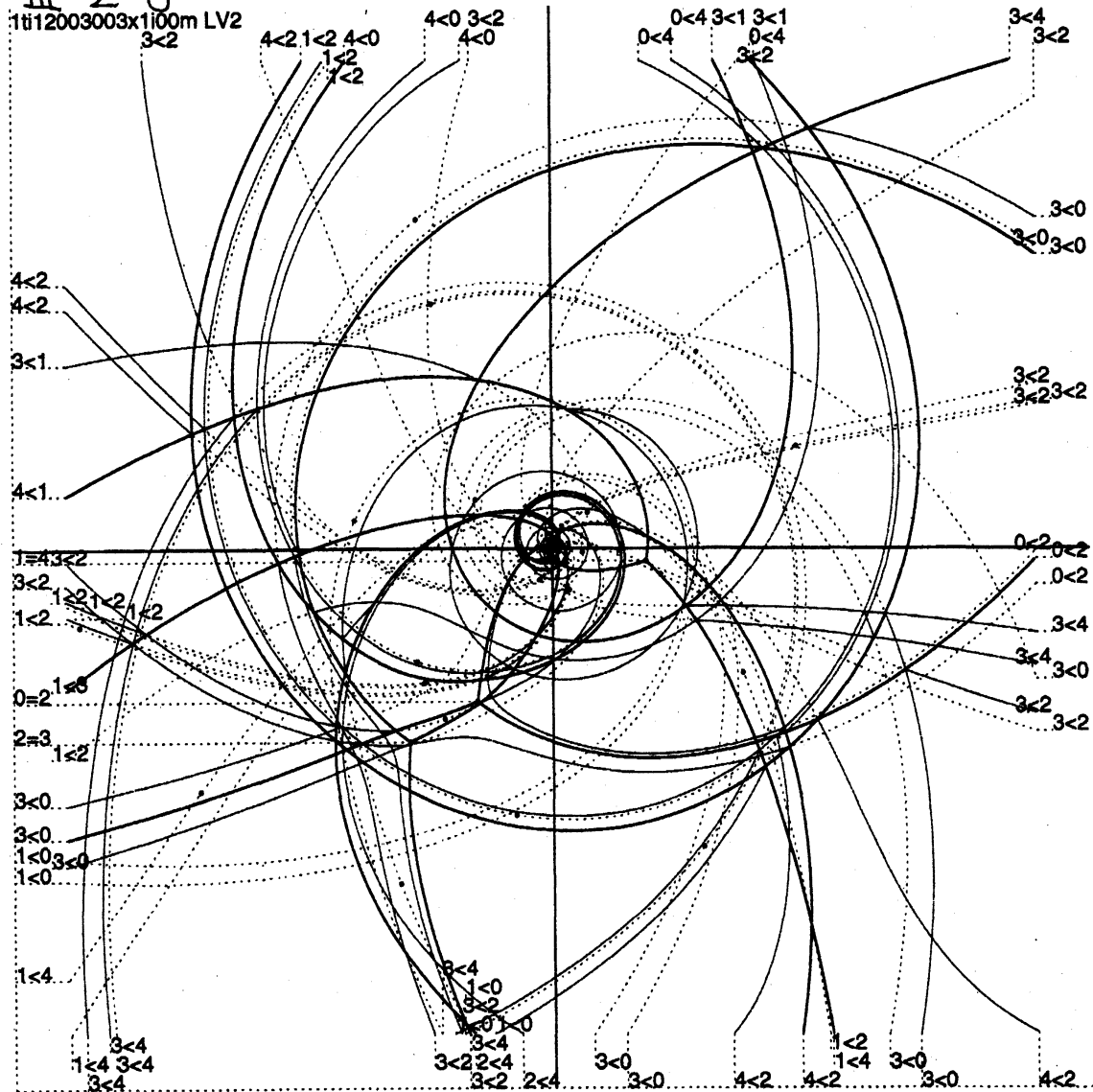
2=4

0=4

④ 抗大圖

III-2-8

1112003003x1100m LV2

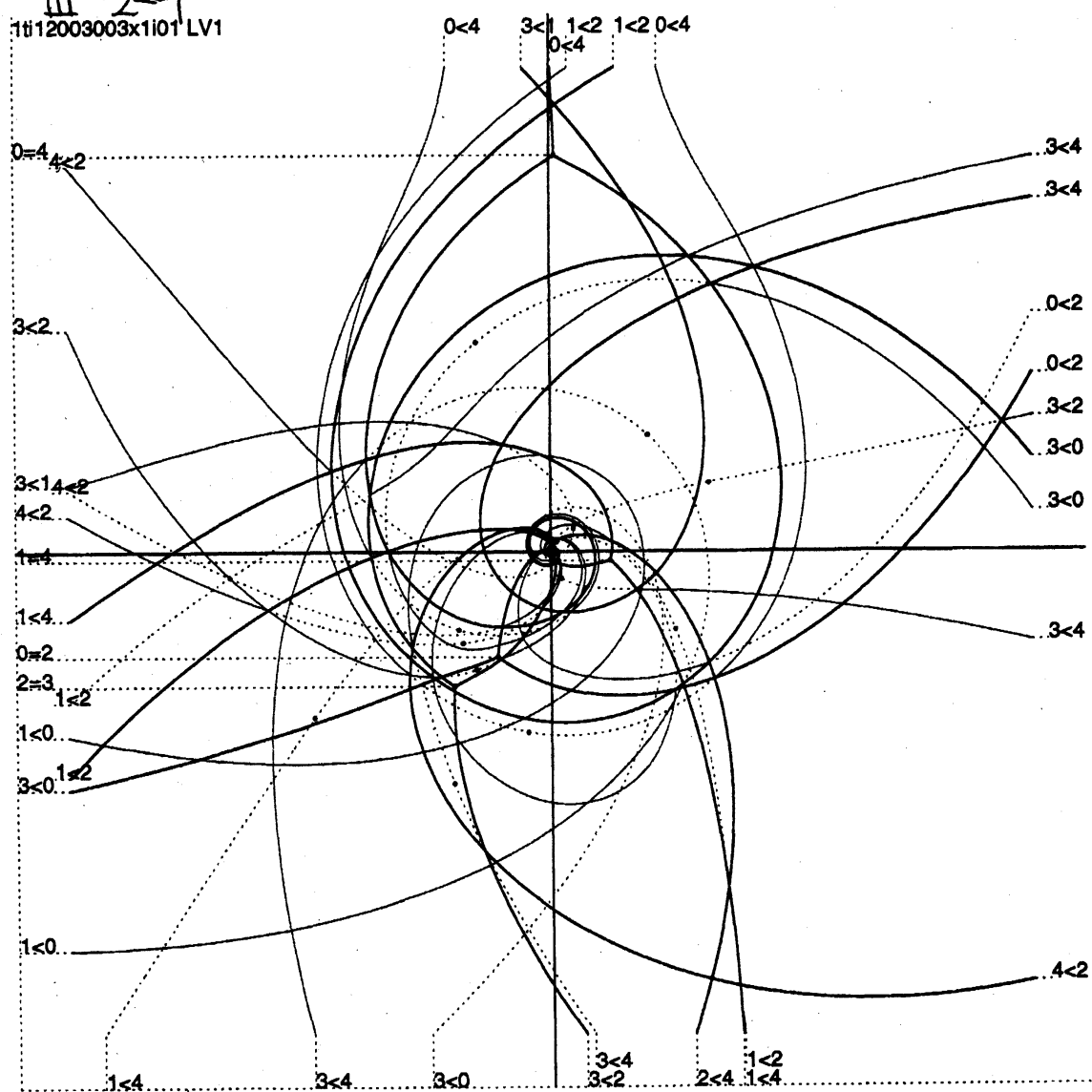


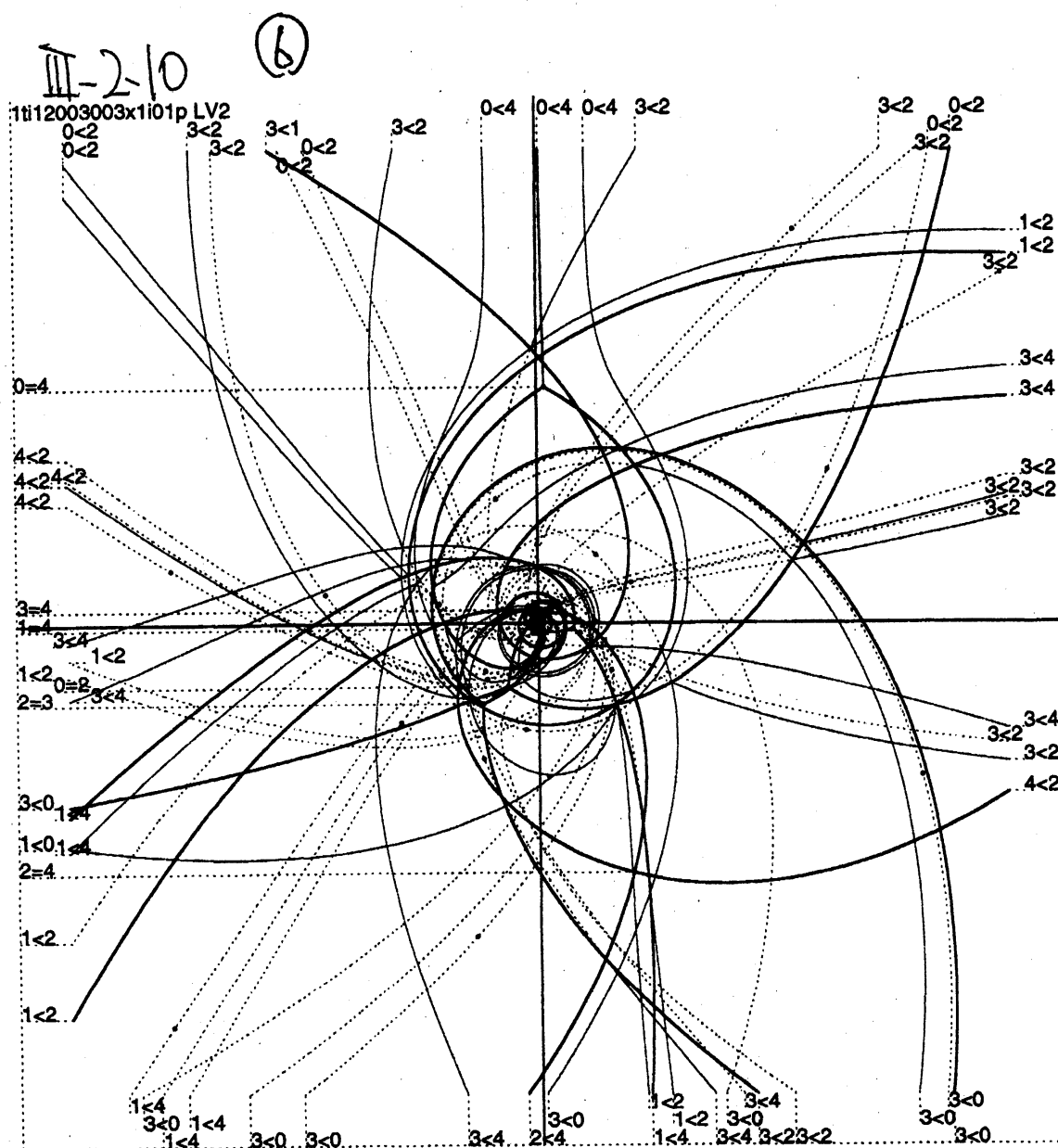
⑤

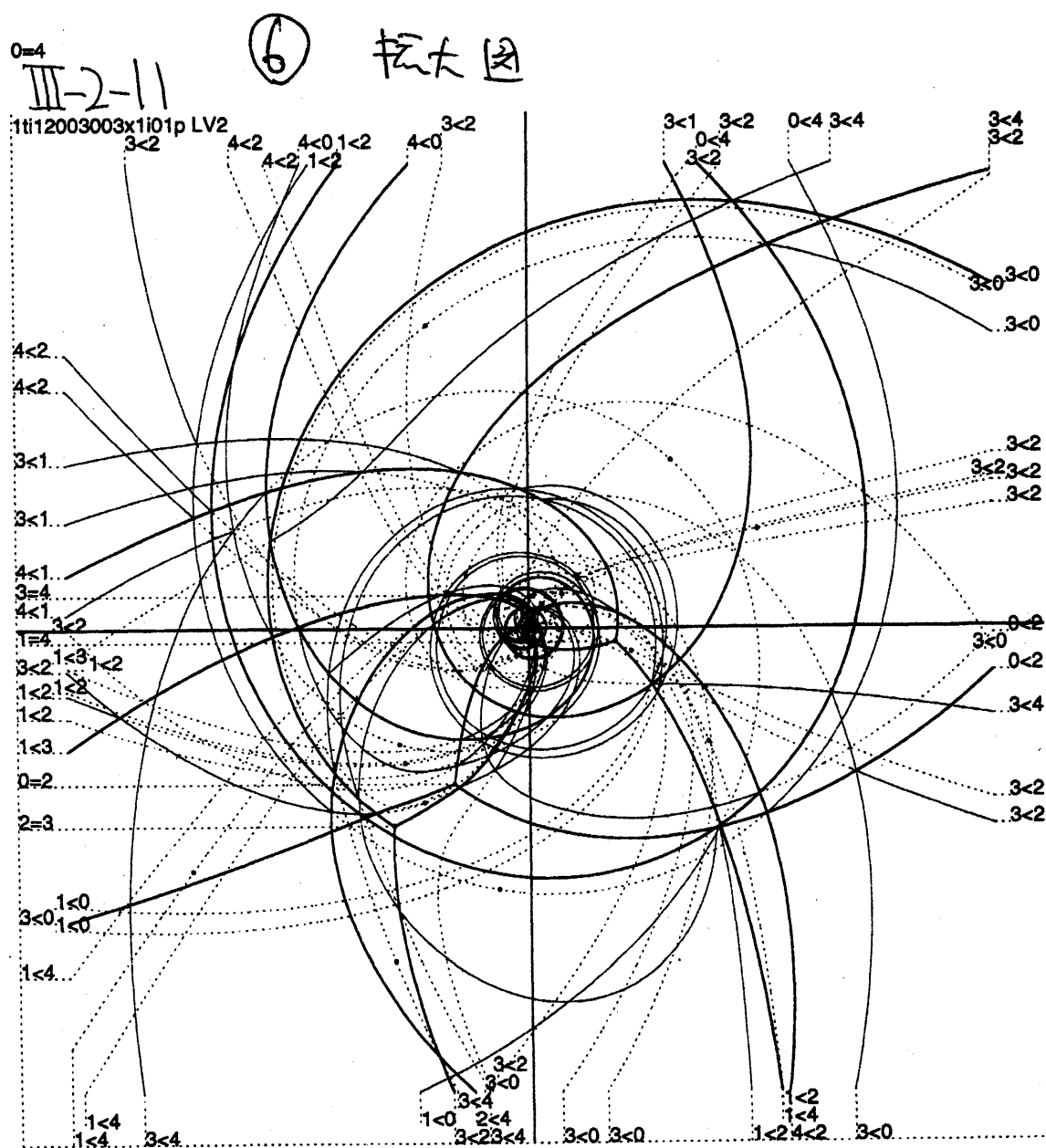
双方向本はみよふたし。

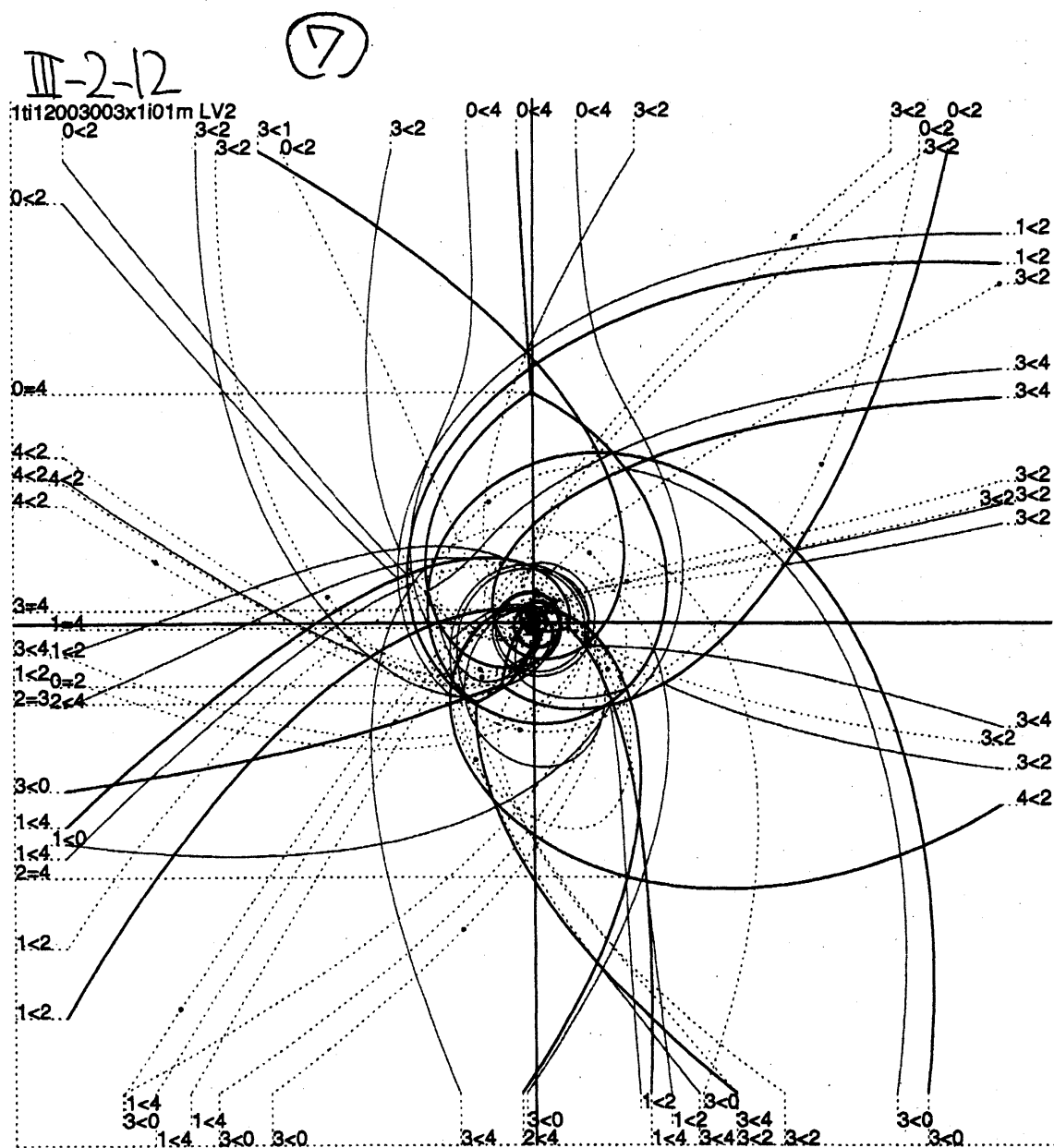
III-2-9

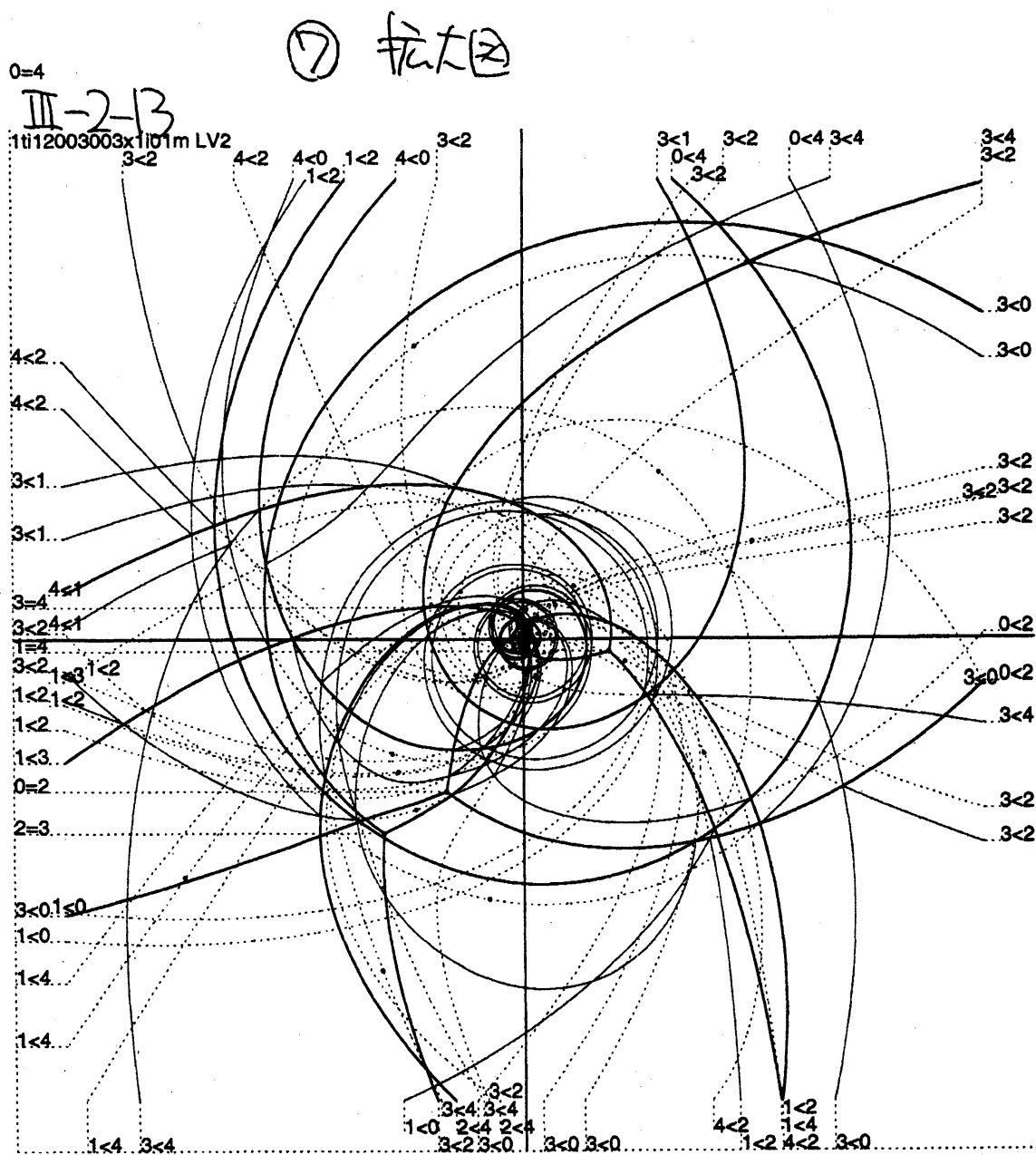
112003003x1i01 LV1











IV. 有効双方向 2 分木の変形

有効双方向 2 分木 T は、一般に t が非線形方程式系のストークス曲線上を連続的に動くとき、連続的に変形する。但し、幾つかの例外点で T の位数が変化したり、消滅してしまう事がある。その主要な場合は、

1. (CASE A) T のあるセグメントを変わり点が横切る
2. (CASE B) T のあるセグメントの長さが零になる

である。このセクションでは (CASE A)、(CASE B) の具体例をみてみよう。

- CASE A -

Generic な仮定のもとで、ある有効双方向セグメント l を T の枝点でない新たな turning point v が横切る場合を考える。

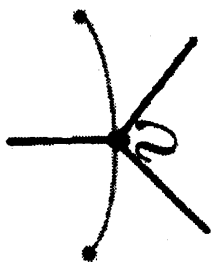
A をさらに (A-1), (A-2), (A-3), (A-4) の場合にわけると。

- (A-1) v のタイプと横切る点でのセグメントのタイプが disjoint の場合: T は変わらない。
- (A-2) v が ordinary turning point で l のタイプと v のタイプが同一の場合: T は消滅する。
- (A-3) v が simple turning point で v と l のタイプが disjoint ではなく、かつ、同じではない場合: T の位数が変化する。
- (A-4) A-1, A-2, A-3 以外の場合: T は変わらない。

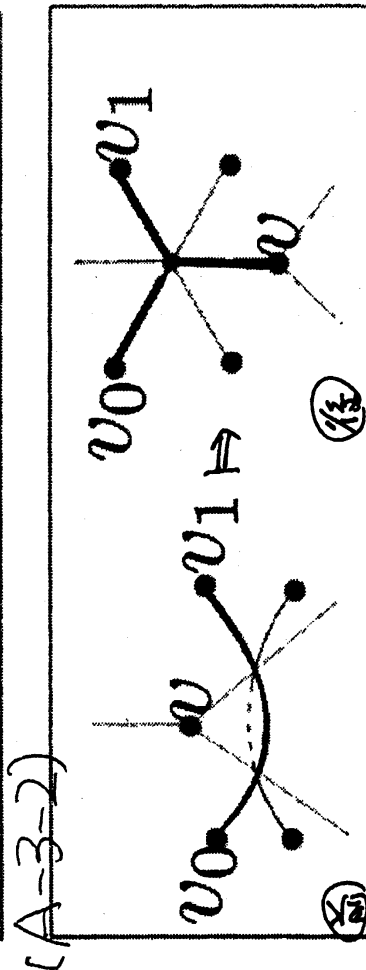
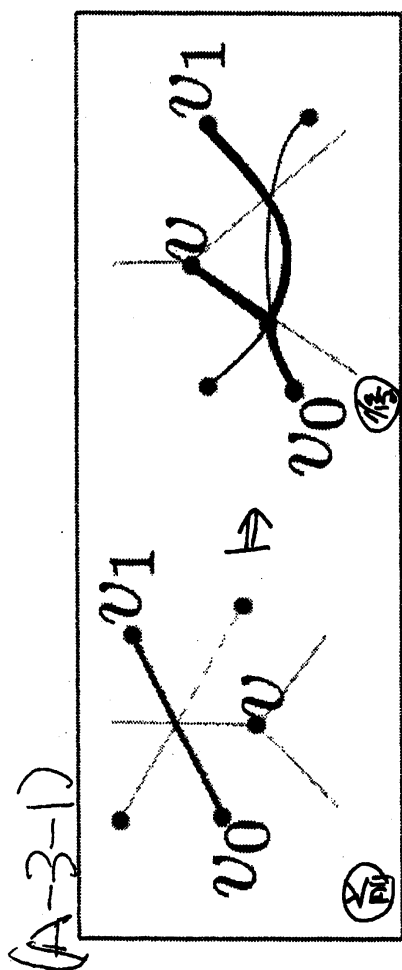
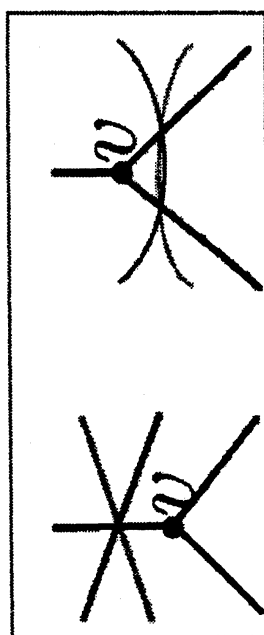
(A-1) は具体例をみるまでもない。(A-2) の具体例は、セクション II の具体例の 2 番目の 2 つの木の結合の逆過程である。また、(A-4) は次の (CASE-B) の逆過程として実現される。(A-3) を検討しよう。

(A-3) で、有効双方向 2 分木が連続的に存在するのは、 v が l を通過する前の状態が、次ページの図 (A-3-1) もしくは (A-3-2) とグラフ的に同値な場合に限られる。通過後、 v が新たな枝点として加わった位数が 1 大きい有効双方向 2 分木となる。(A-3-1) と (A-3-2) の具体例を見てみよう。

Transversalに交わるとは

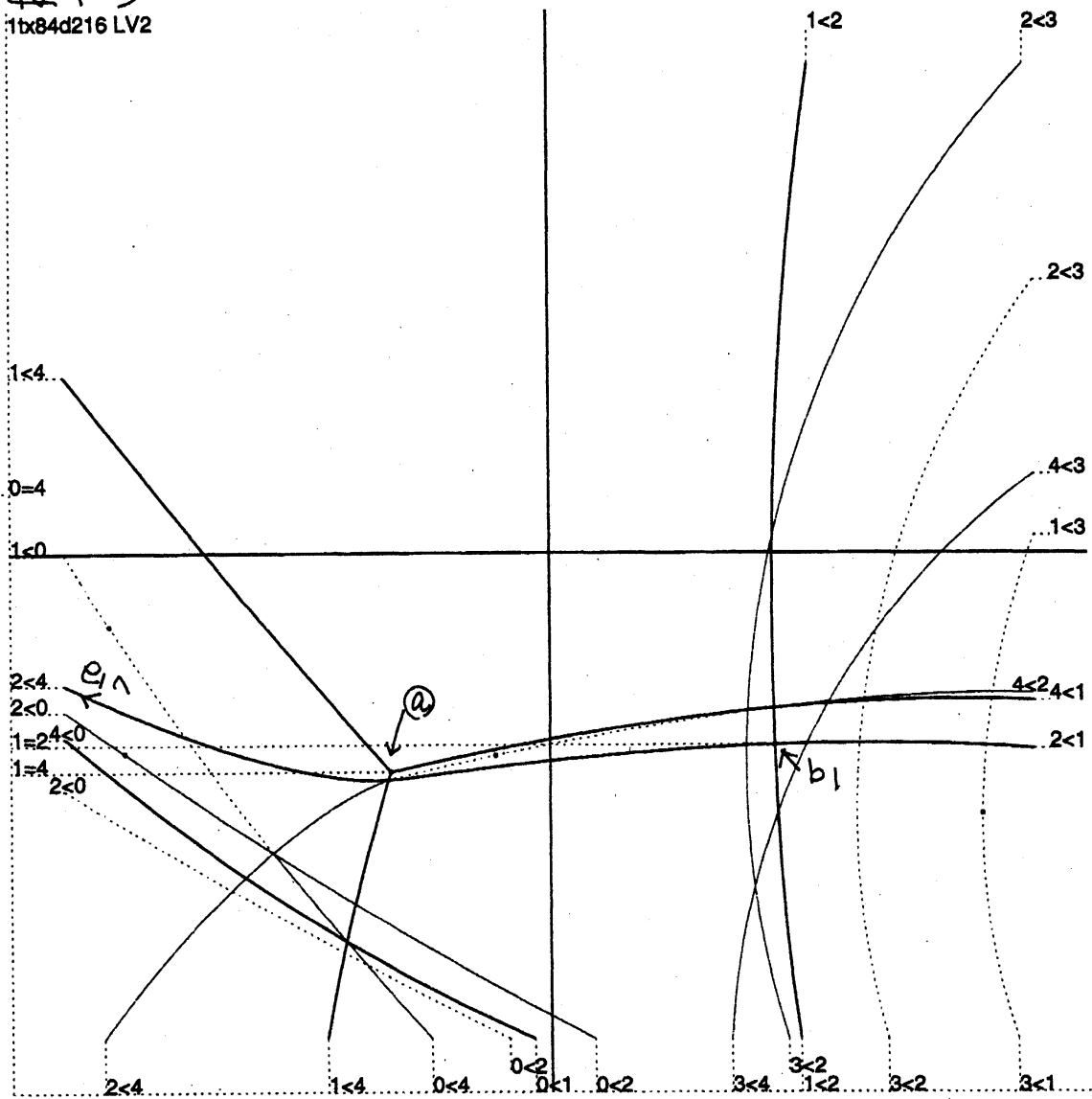


前後における曲線の变化



Ⅱ-1-3 CASE(A-3-1) 通過前 (拡大図)

1bx84d216 LV2



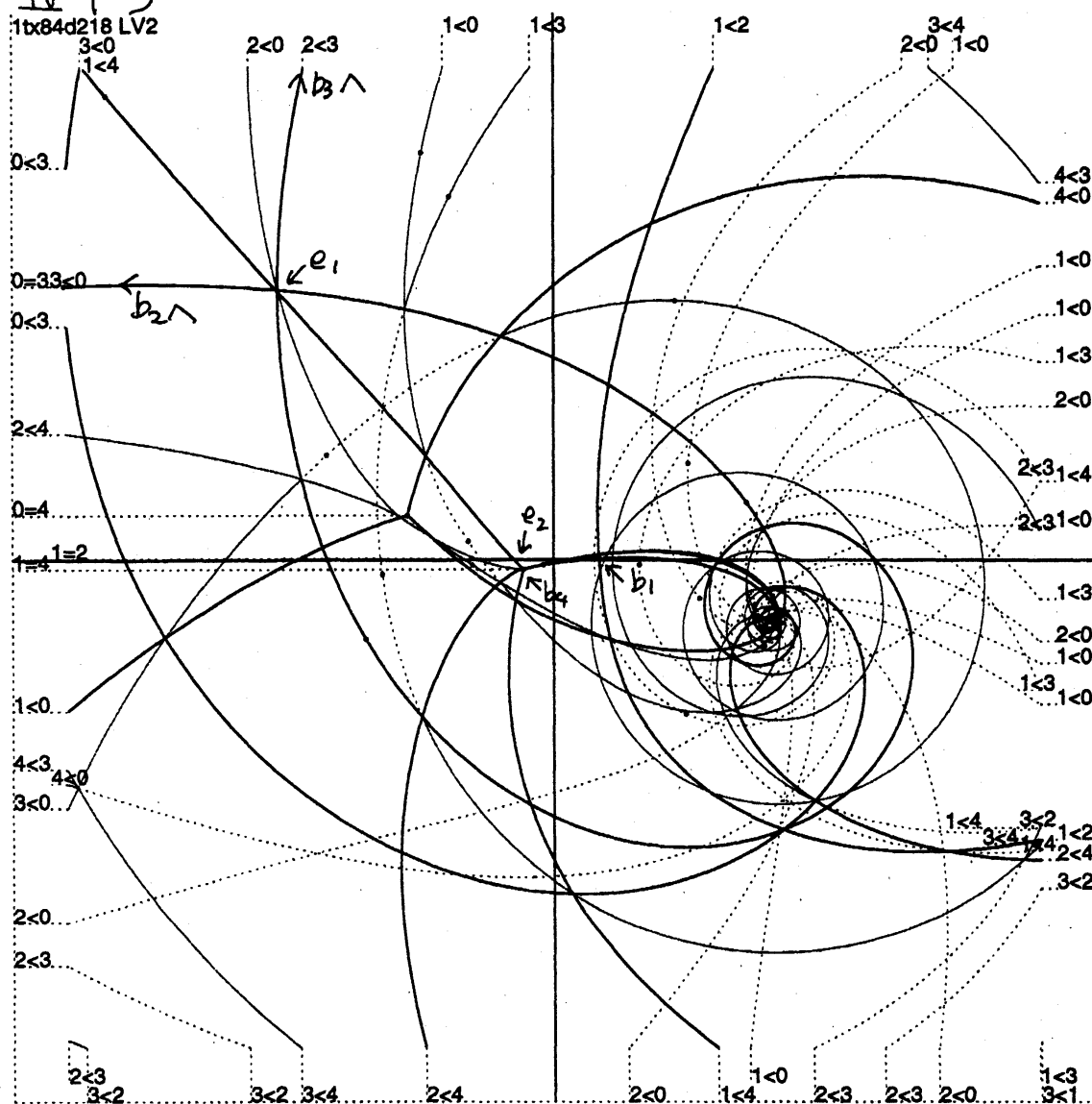
このグラフを (A-3-1) の形で
通過はよとていえる。

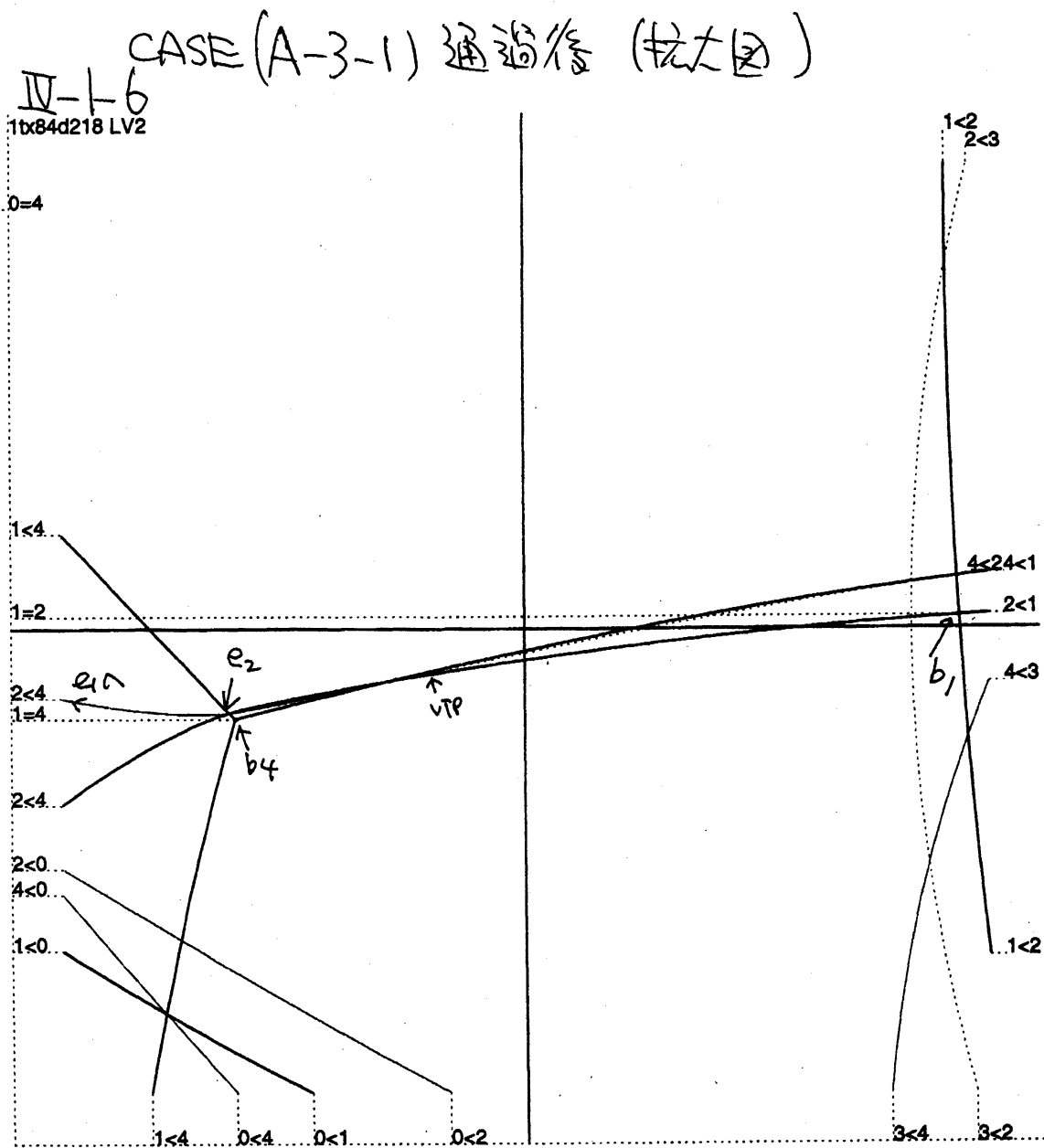
2=3

CASE (A-3-1) 通過後 (抗大區)

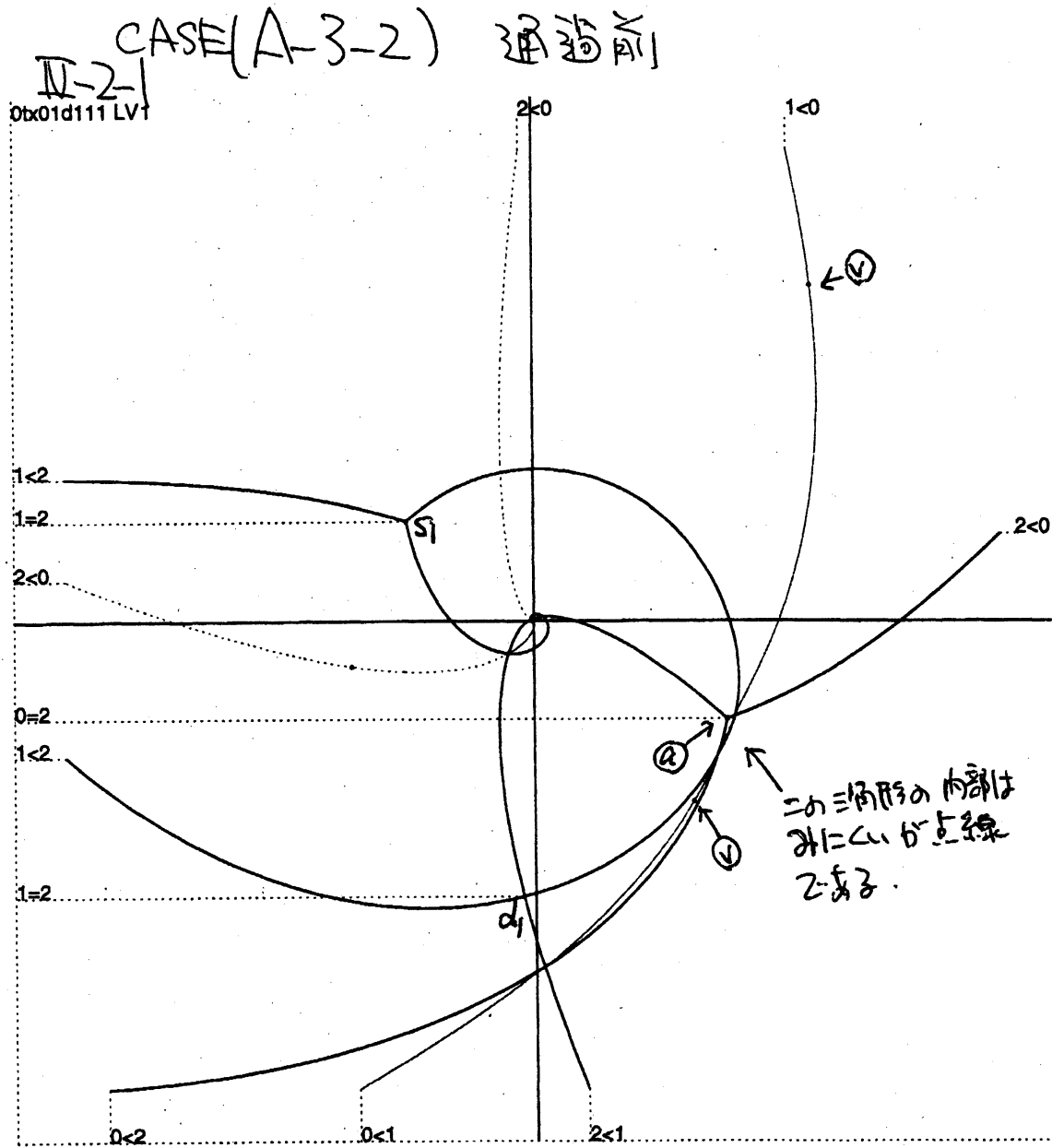
IV-1-5

1tx84d218 LV2





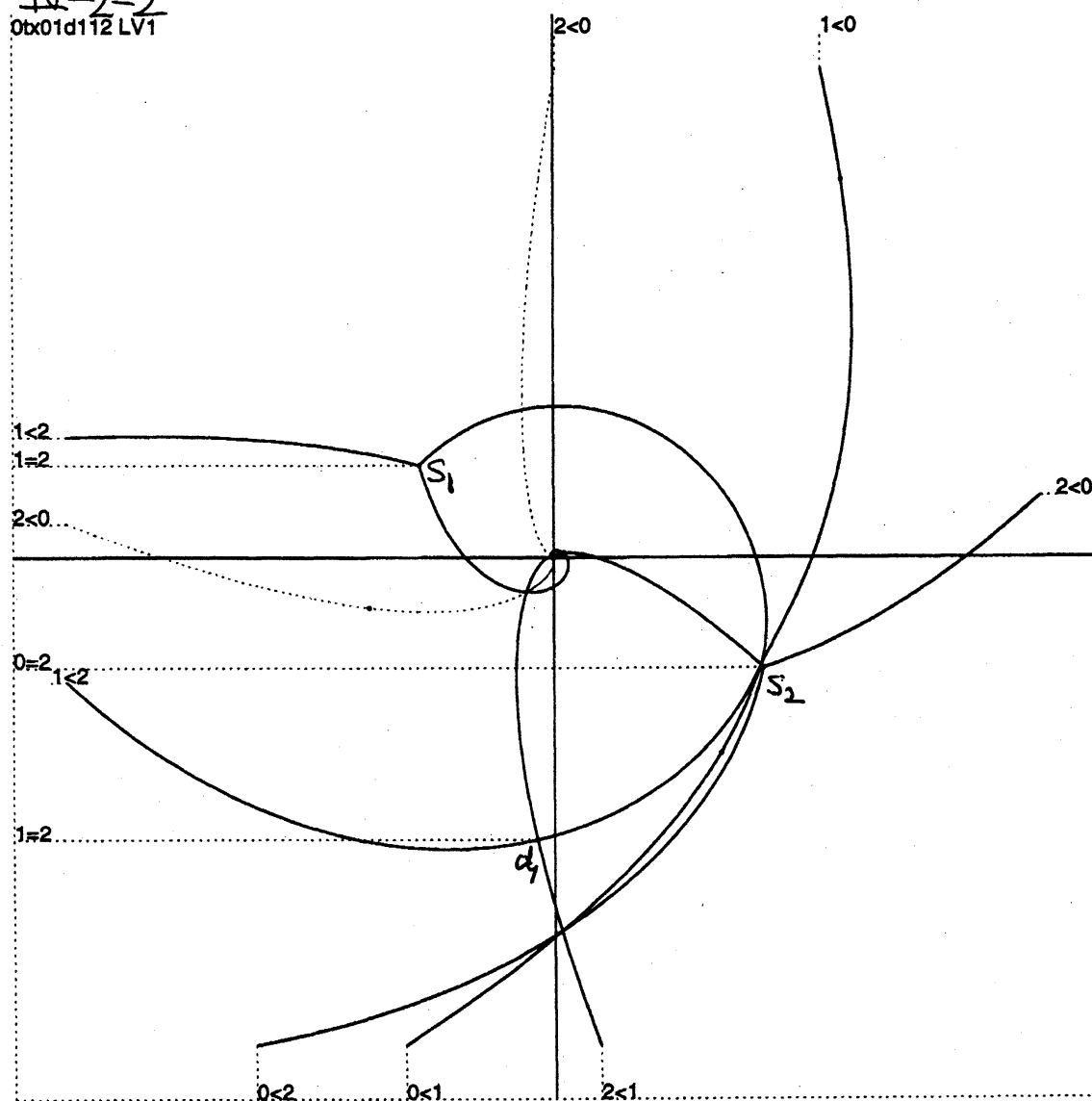
b_4 が新たに折点として本に加わった
事が判る。



木S₁d₁に対し、②はA-3-2の形で、
通過しようとしている。

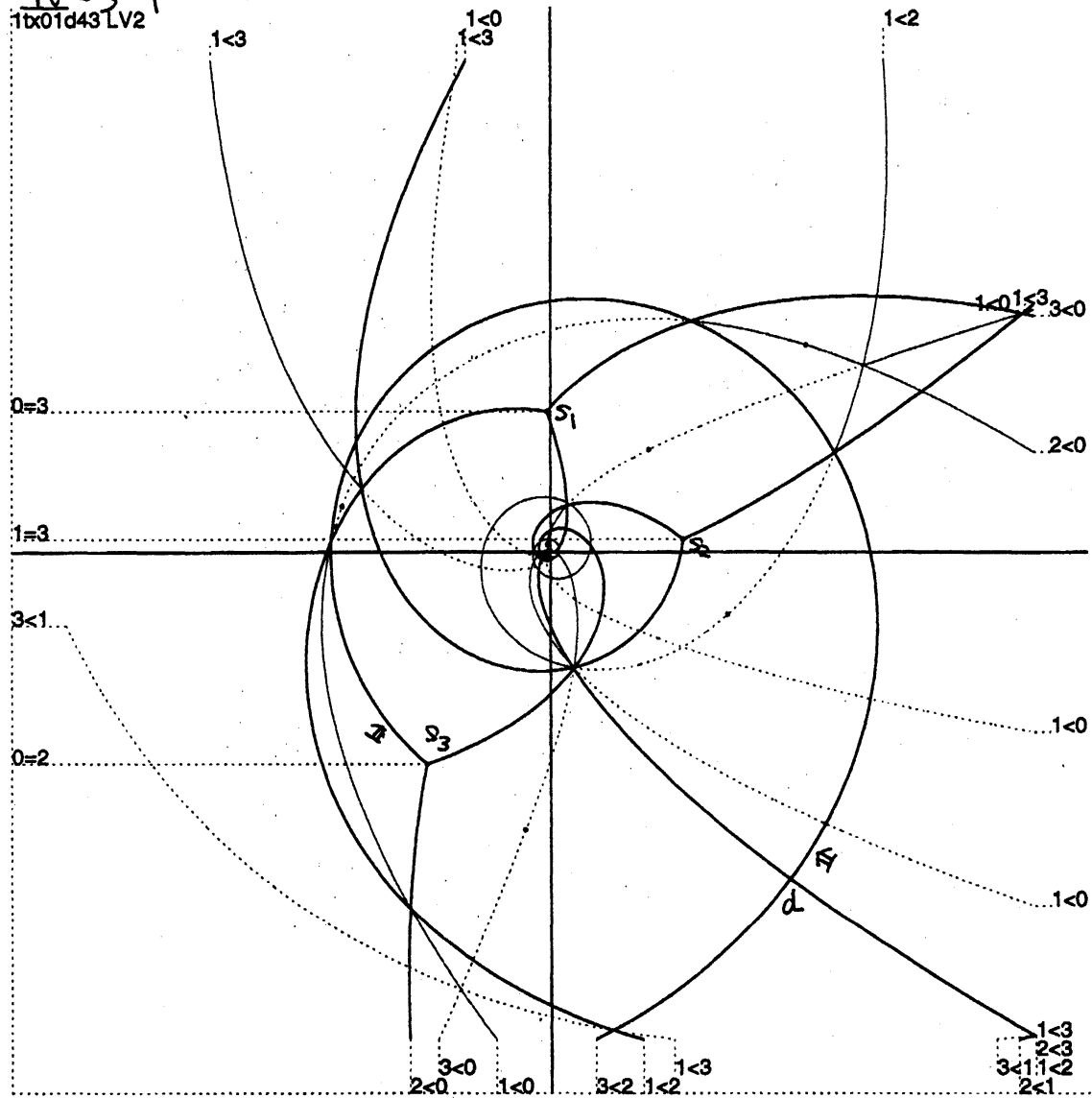
IV-2-2 CASE (A-3-2) 通過後

0bx01d112 LV1

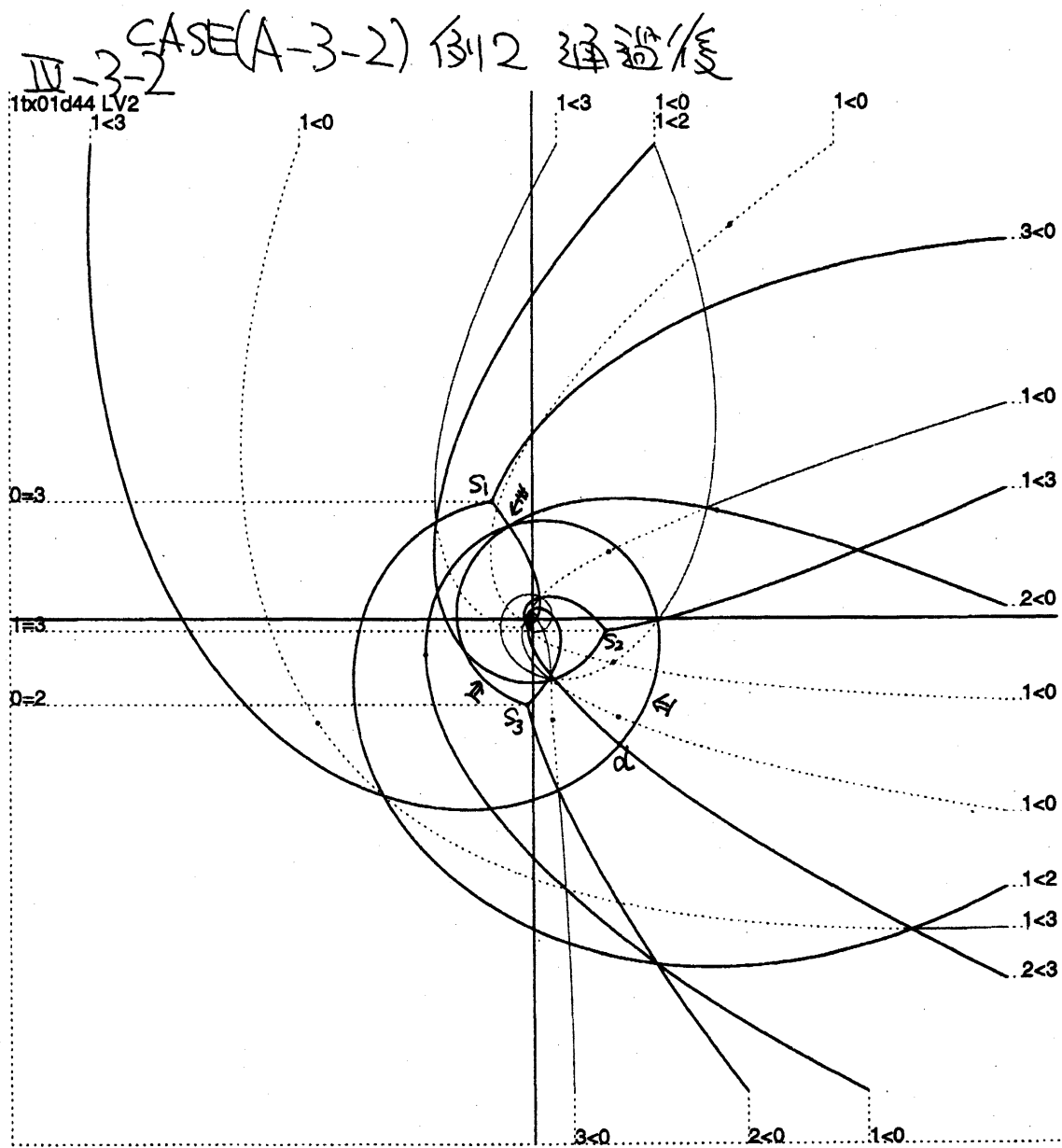


①が本にばかり、位置3の本 $S_1 S_2 d_1$
と書いた。

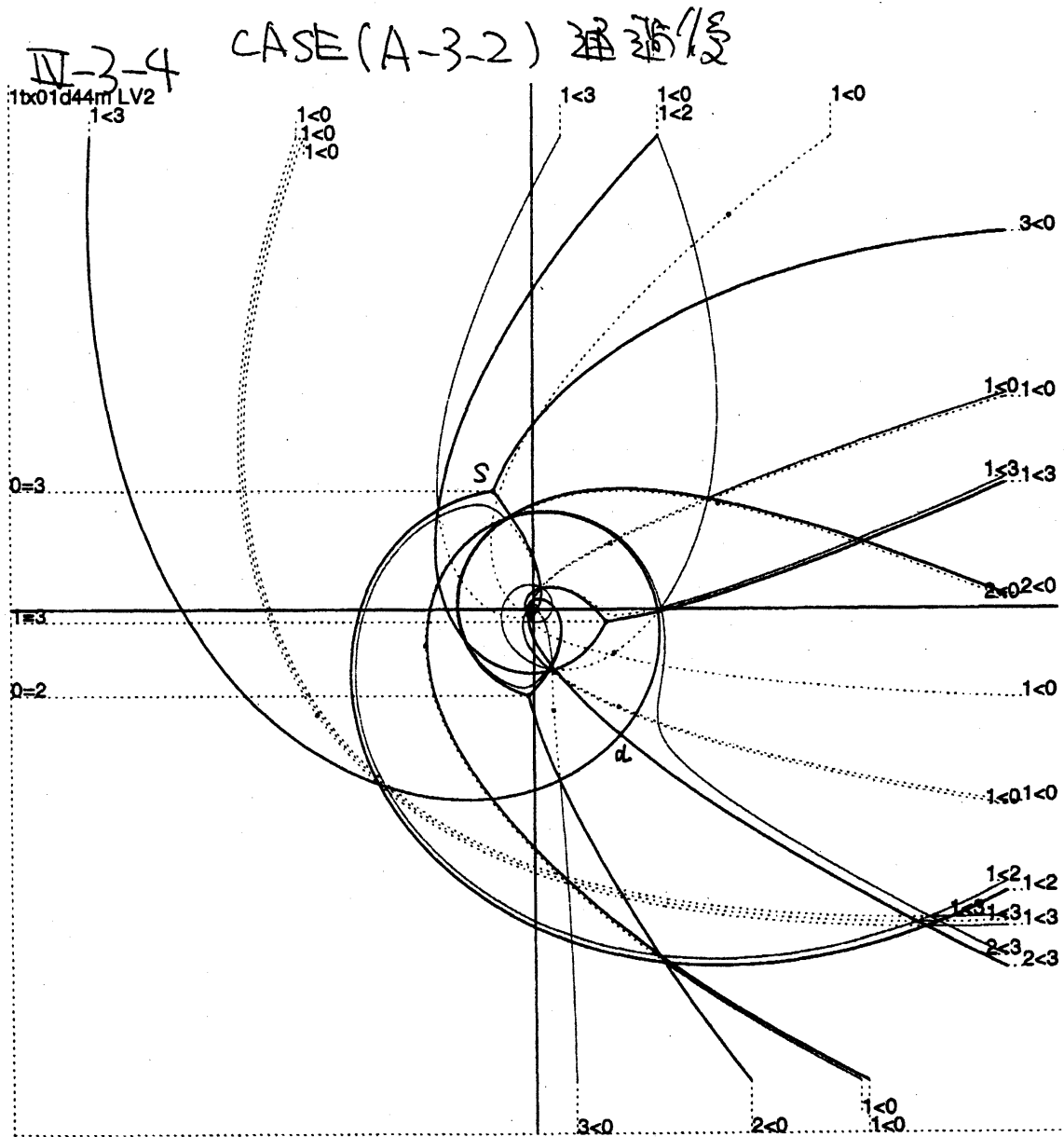
IV-3 CASE (A-3-2) 例2 通過前



本はS₃に対し、S₁がA-3-2の形2-
通過はとらえる。



S₁が新たに加わり位置3の本でS₃S₁となった。



これを2-2曲線から下にはずす(た)

- CASE B -

$t = t_1$ である有効双方向セグメント l の長さが 0 になる場合。 l の端点
が分岐点のみからなるか、枝点を含むかで状況が異なる。

CASE B-1 : l の端点が枝点を含む場合:

枝点 v は ordinary turning point である事に注意する。次の 2 つの場合
に分かれる。

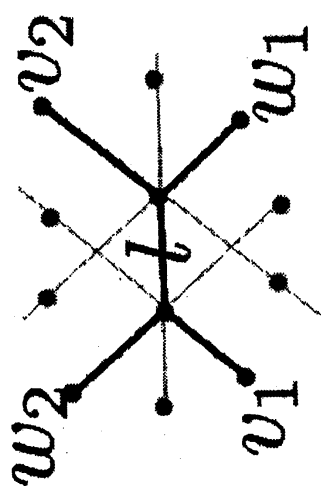
- (B-1-1) v が simple turning point の場合: (A-3) の場合の逆操作
となる。位数が 1 少ない有効双方向 2 分木となる。
- (B-1-2) v が double turning point の場合: T は変化しない。

CASE B-2 : l の端点は分岐点のみからなる場合:

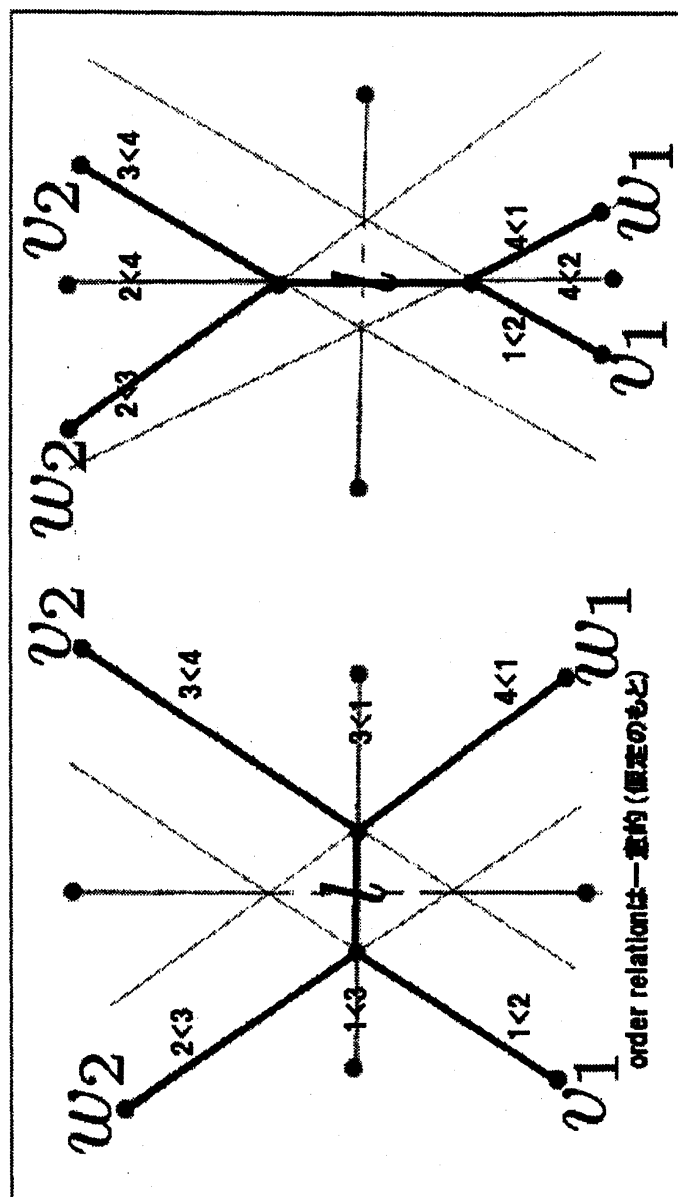
次ページの図とグラフ同値な場合を検討する。図の v_1 と v_2 , w_1 と w_2
のタイプは disjoint と仮定する。(なぜなら、disjoint でないと、turning
point がセグメントを横切るという現象も同伴するからである)。

この時、ある種のセグメントの交換が発生するが、前後で T の位数は
変わらず存続する。

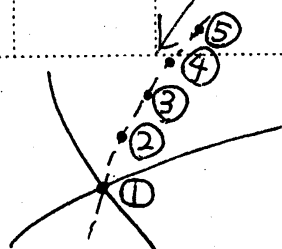
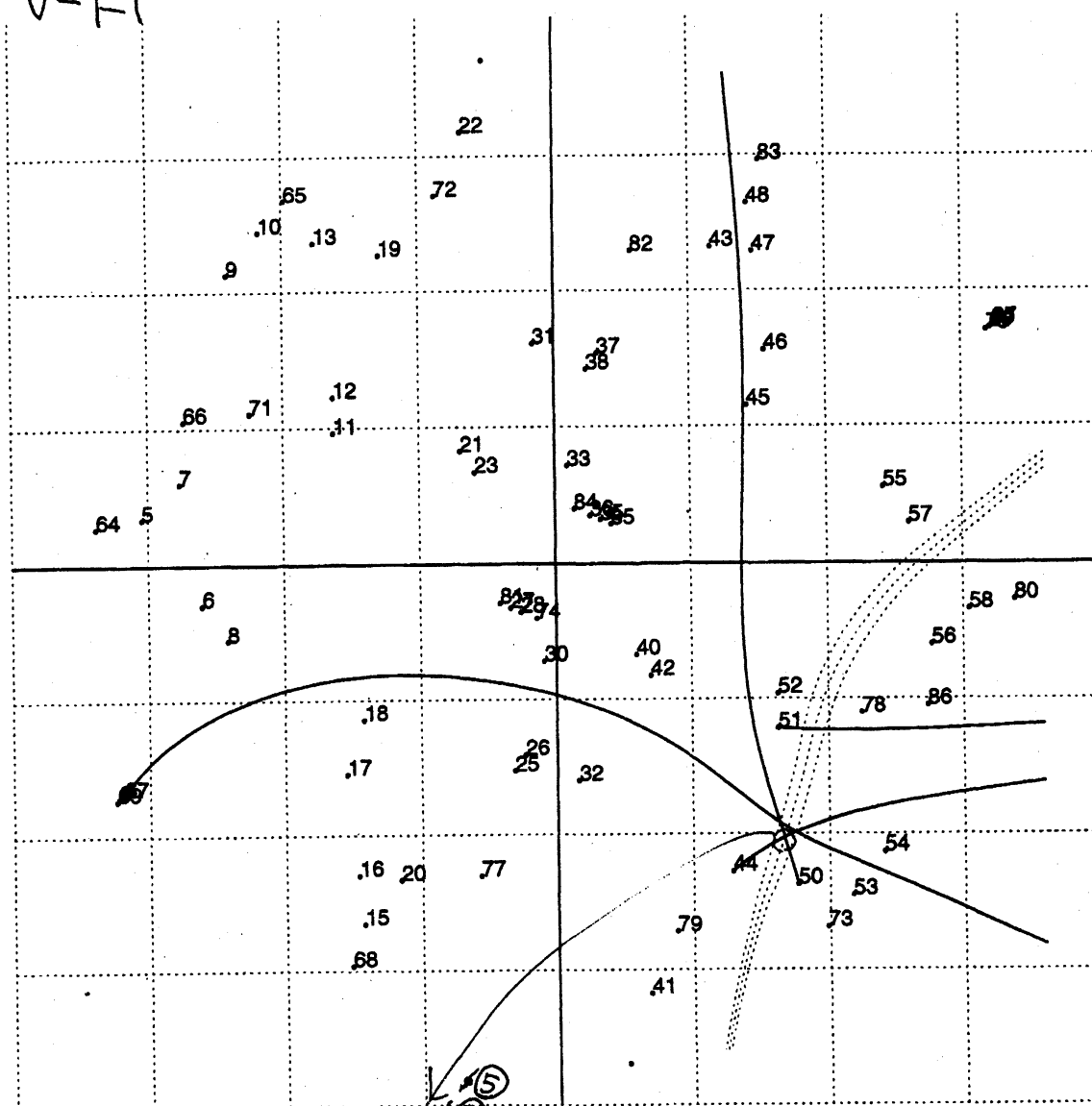
CASE (B-1-1)、(B-1-2)、及び (B-2) の具体例を見よう。



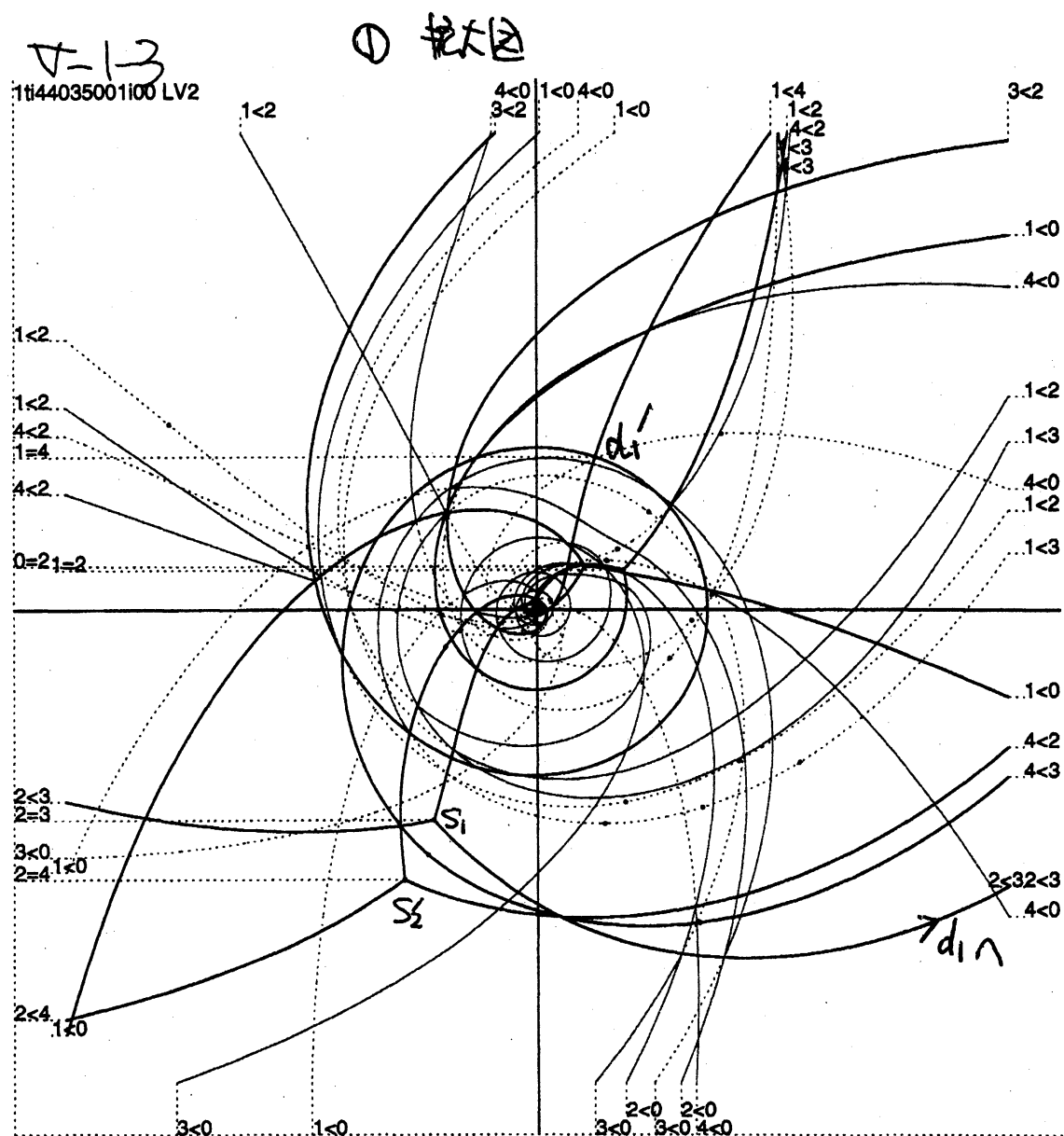
l の長さが0

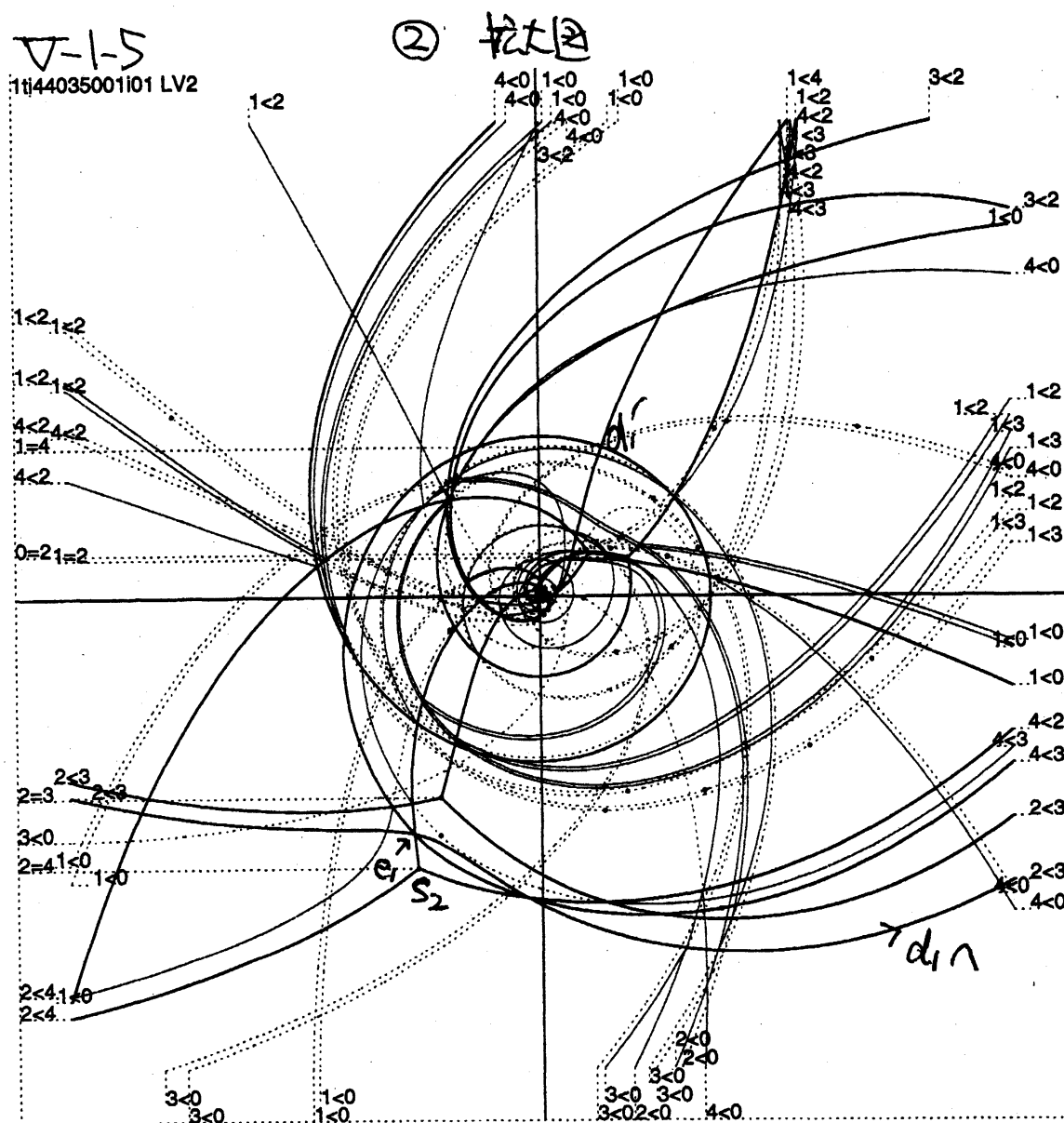


CASE (B-1-1)
V-H1



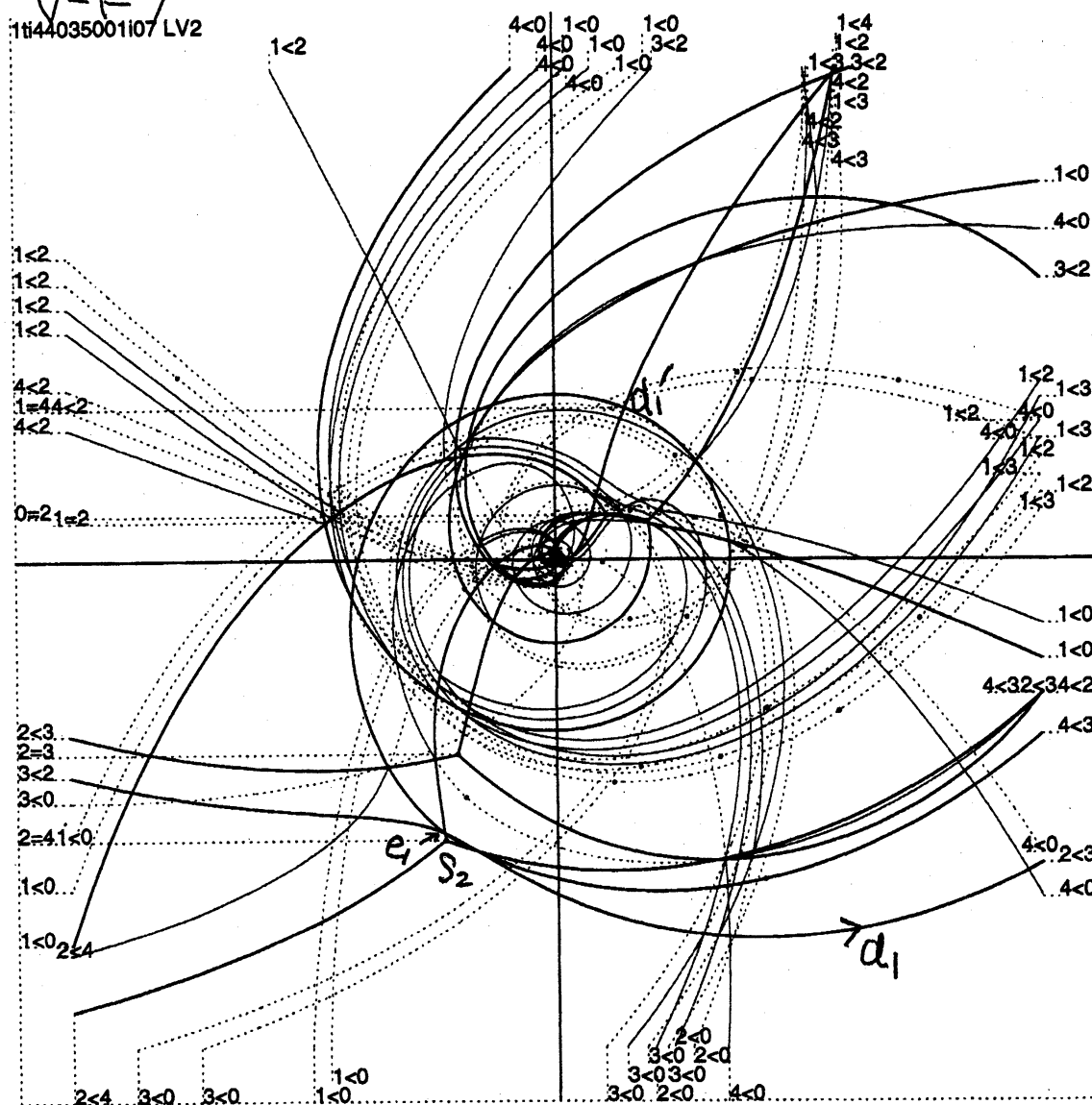
位数3の本から
Simple turning point がぬけ
位数2の本と与る例



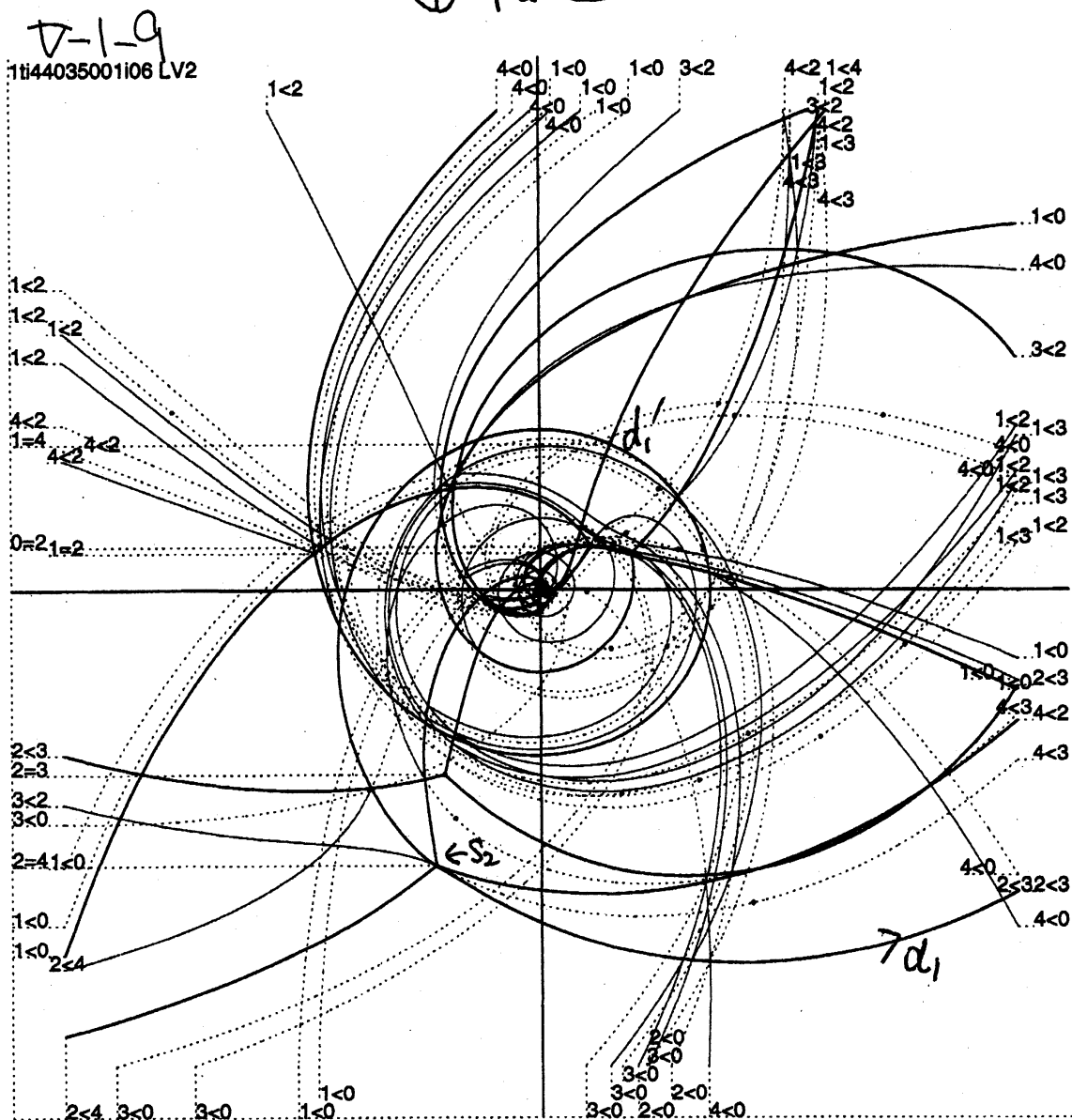


③ 拡大図

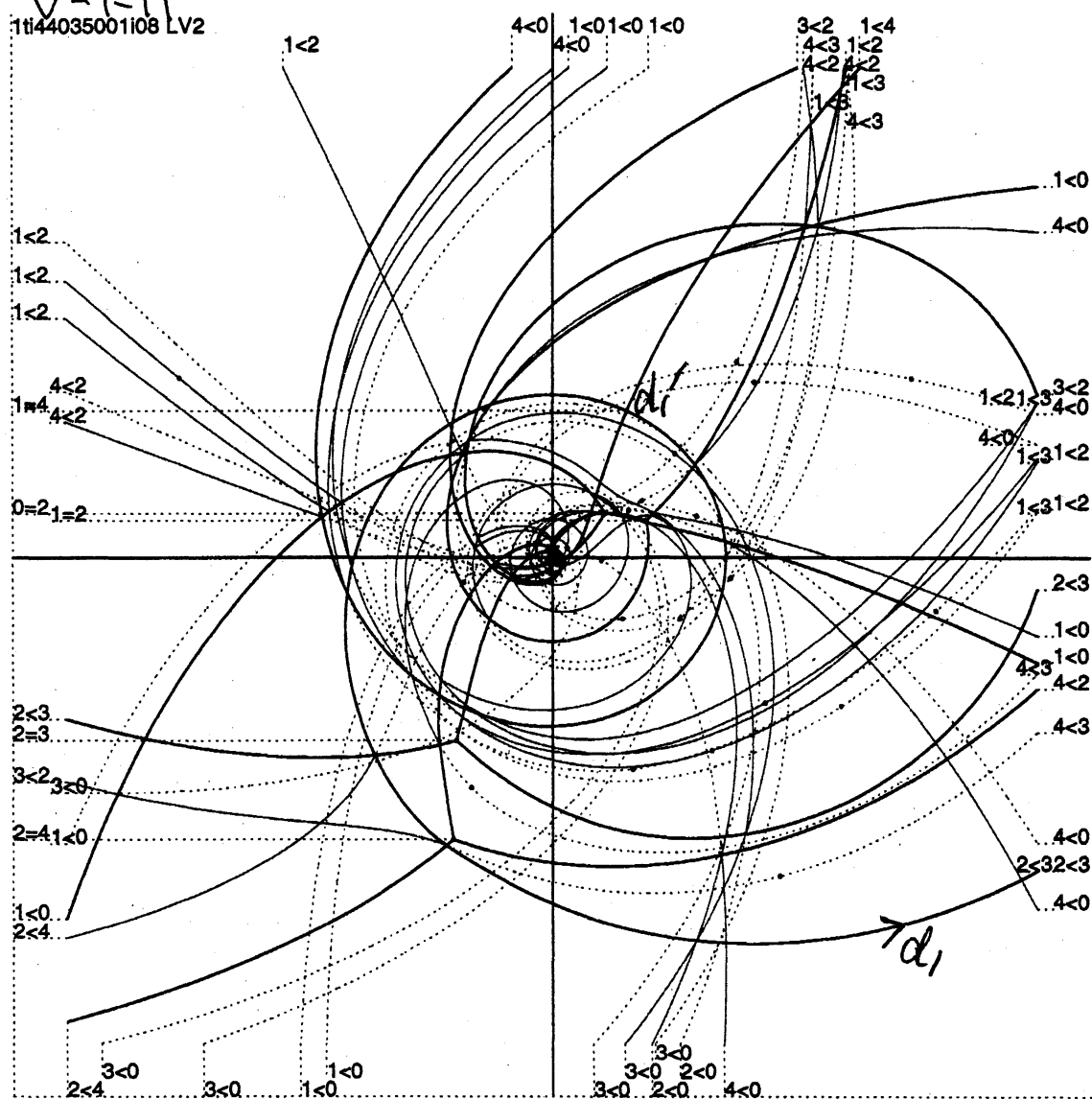
V-17
1144035001107 LV2



④ 拡大図



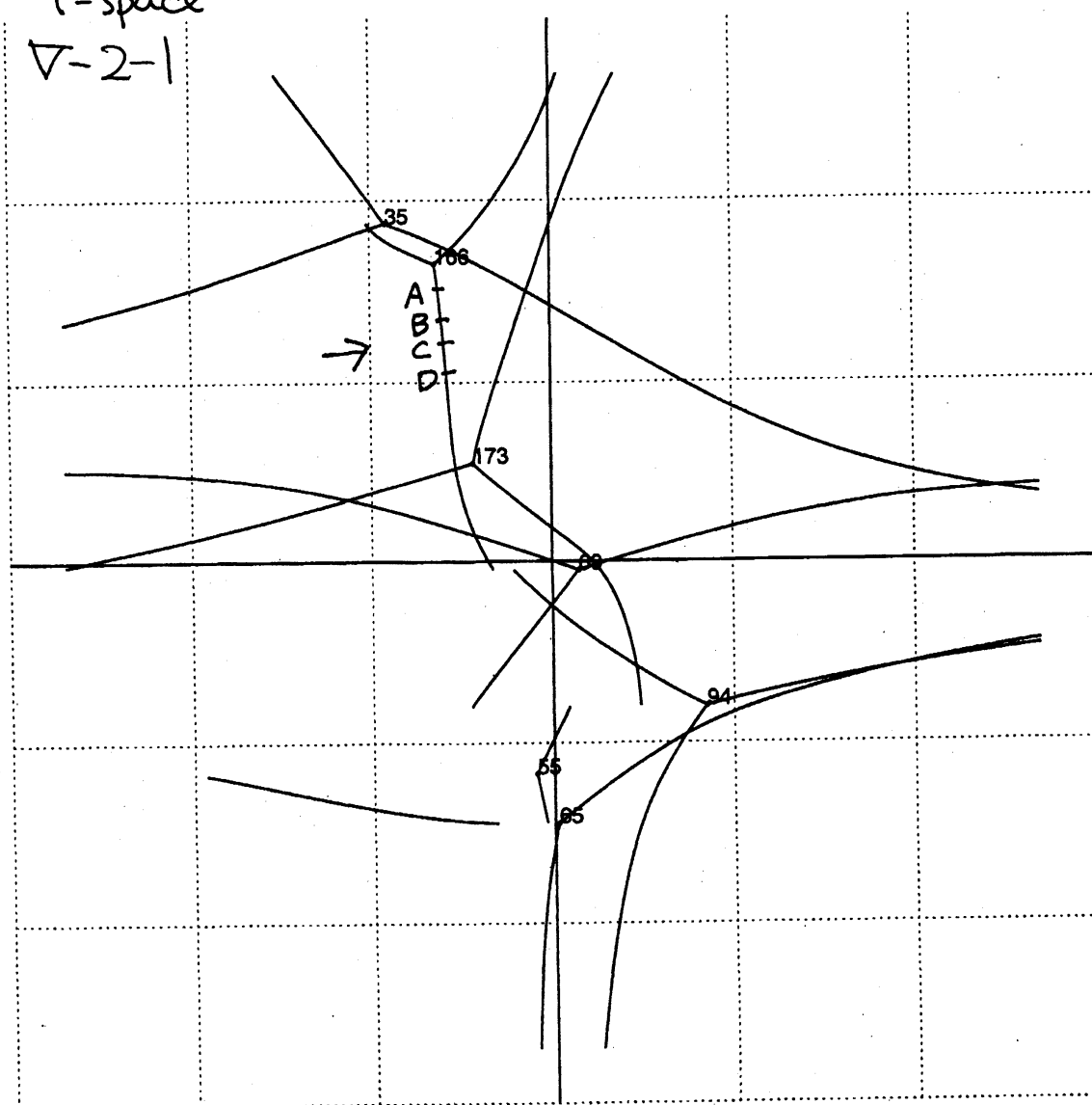
⑤ 拡大図

 $\nabla = 1-11$
 11144035001108 LV2


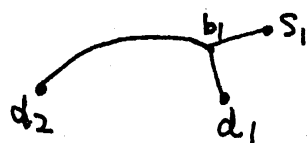
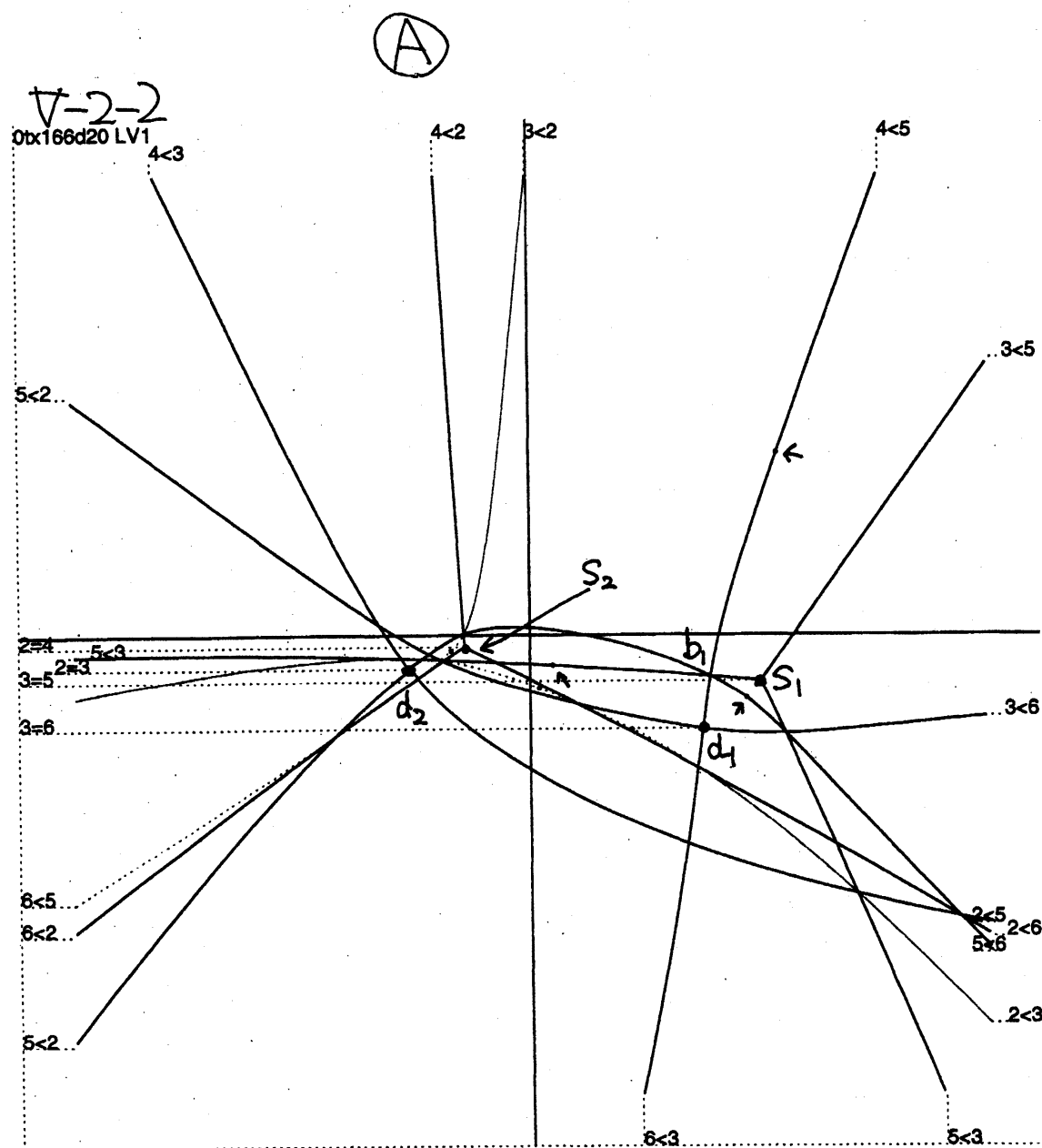
NY6 CASE (B-1-2)

t-space

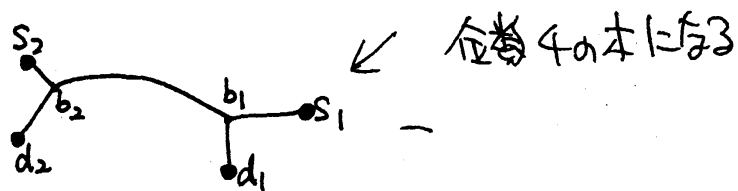
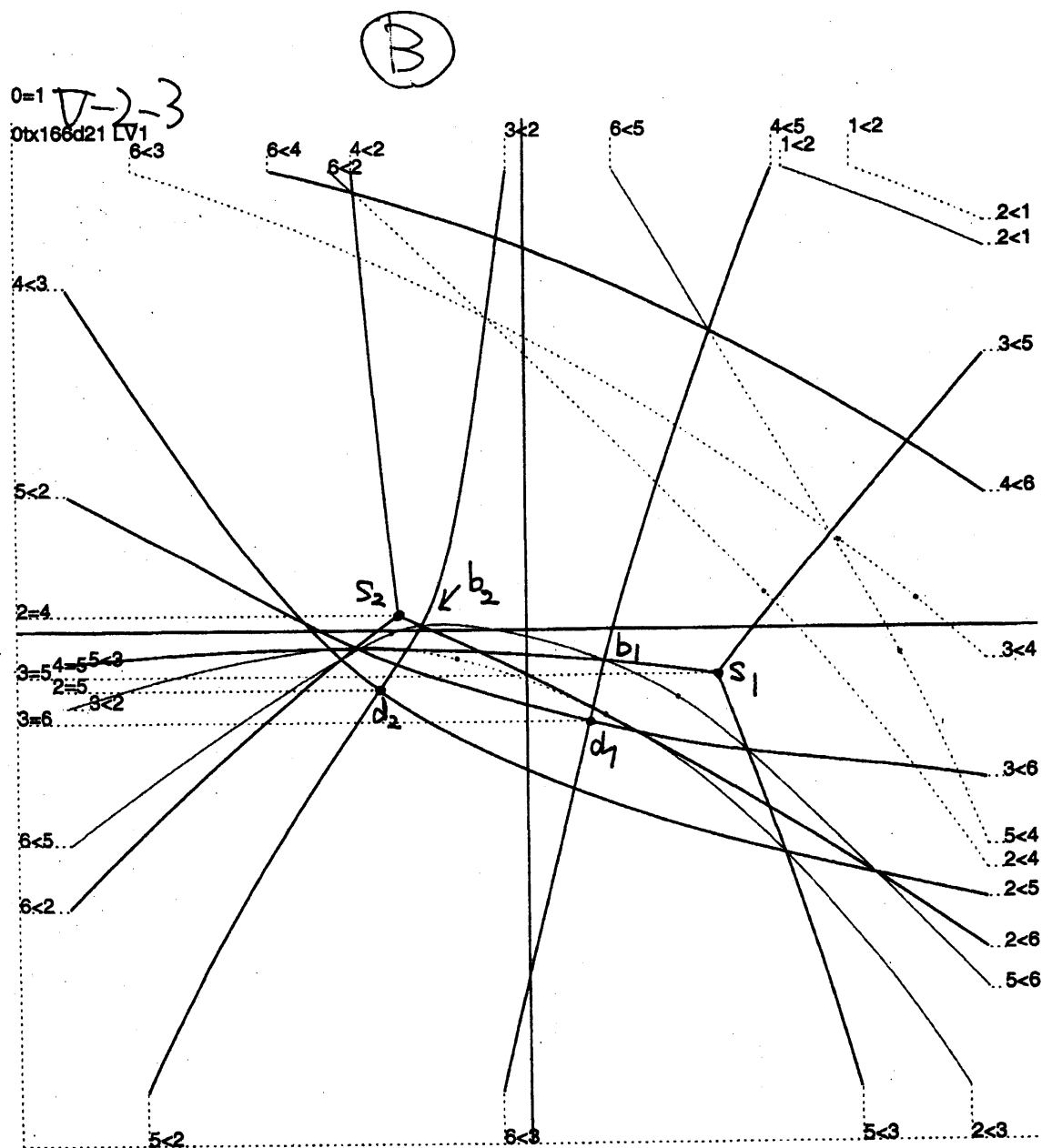
V-2-1



位数4の本で、枝点が double turning point
だと、わかる事はない例

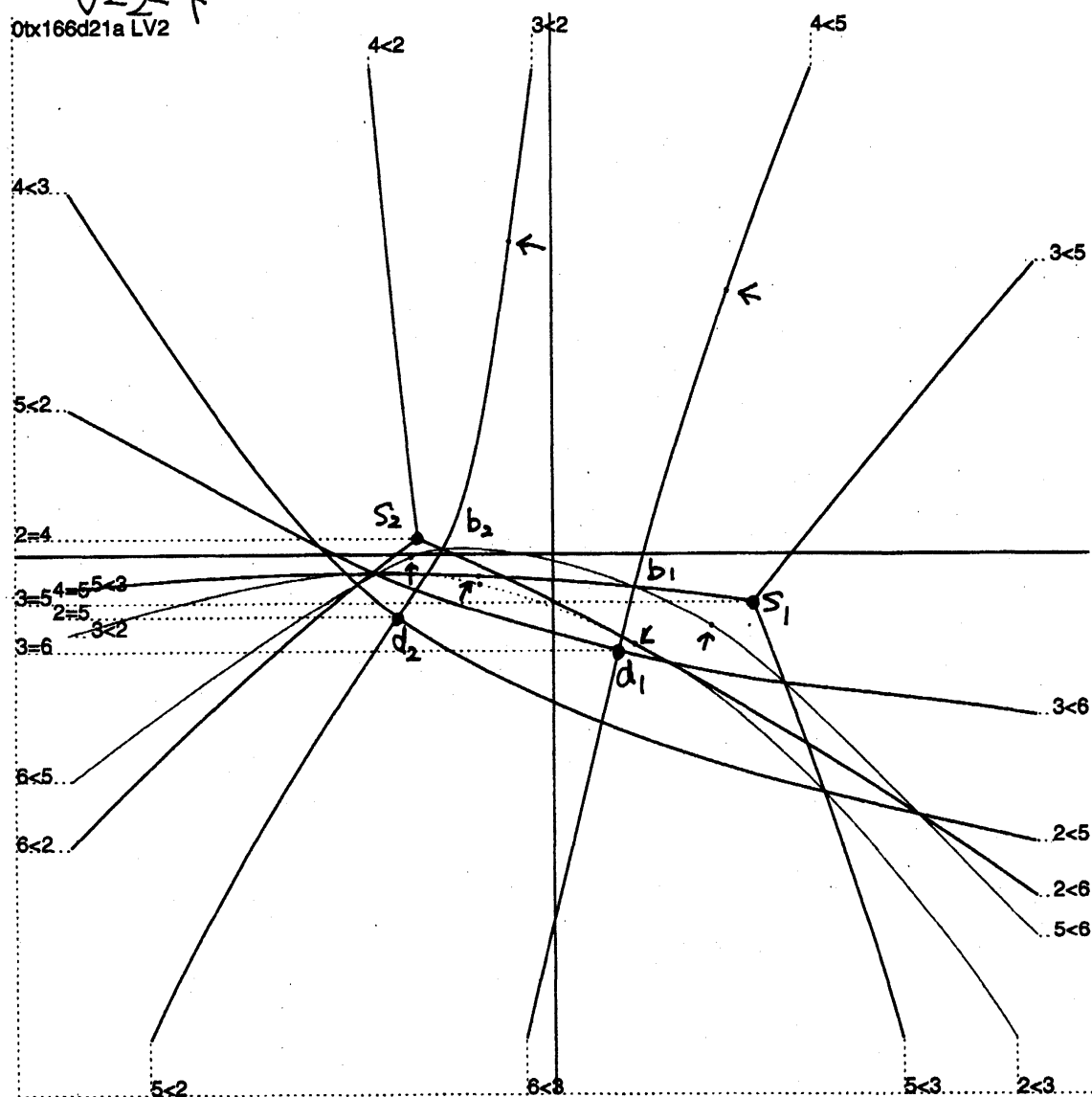


位勢3の本



③ 拡大図

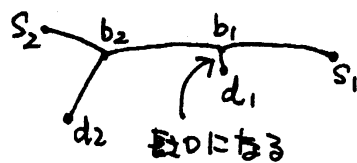
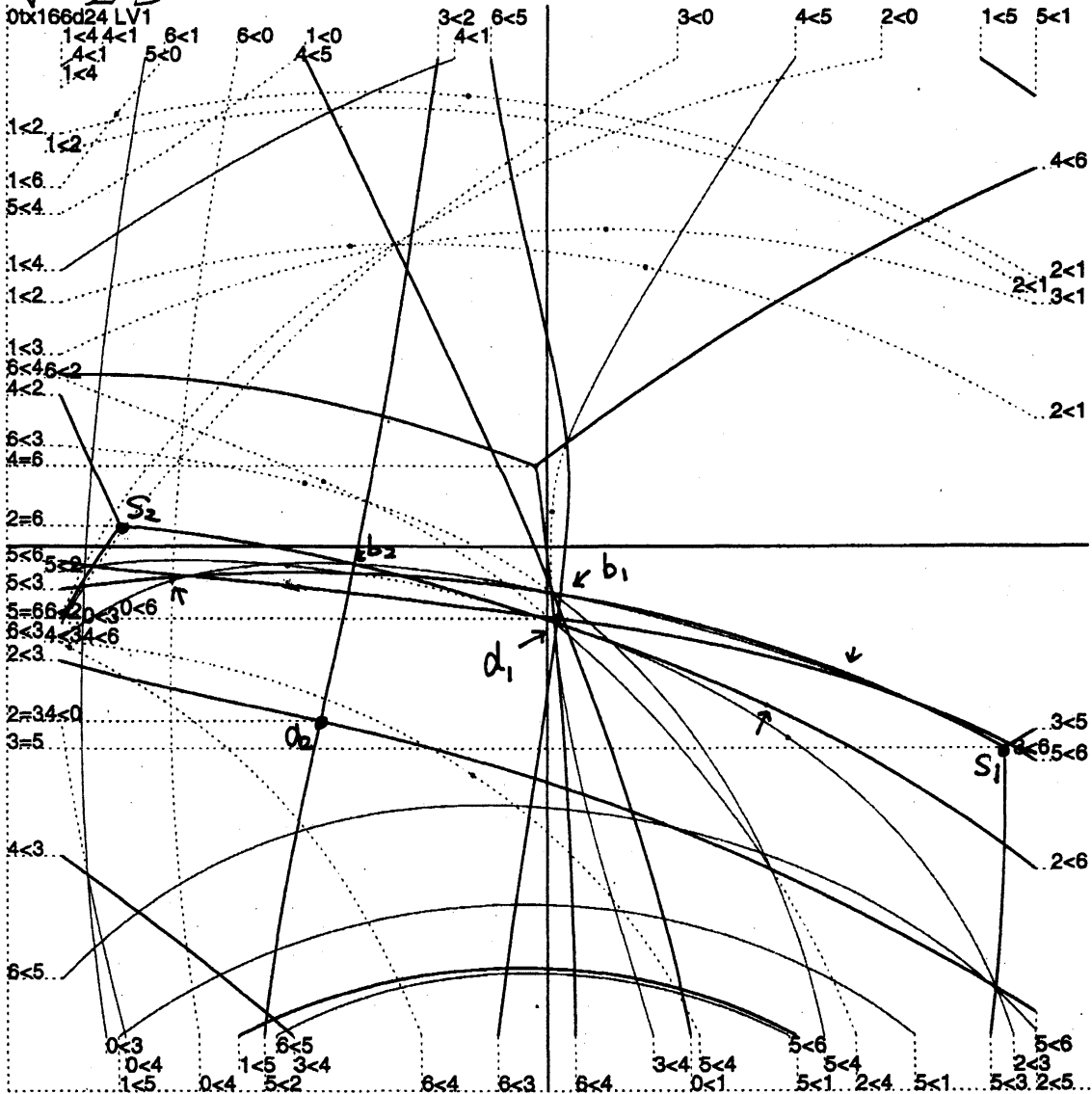
0=1 ∇ -2-4
0tx166d21a LV2



5=6

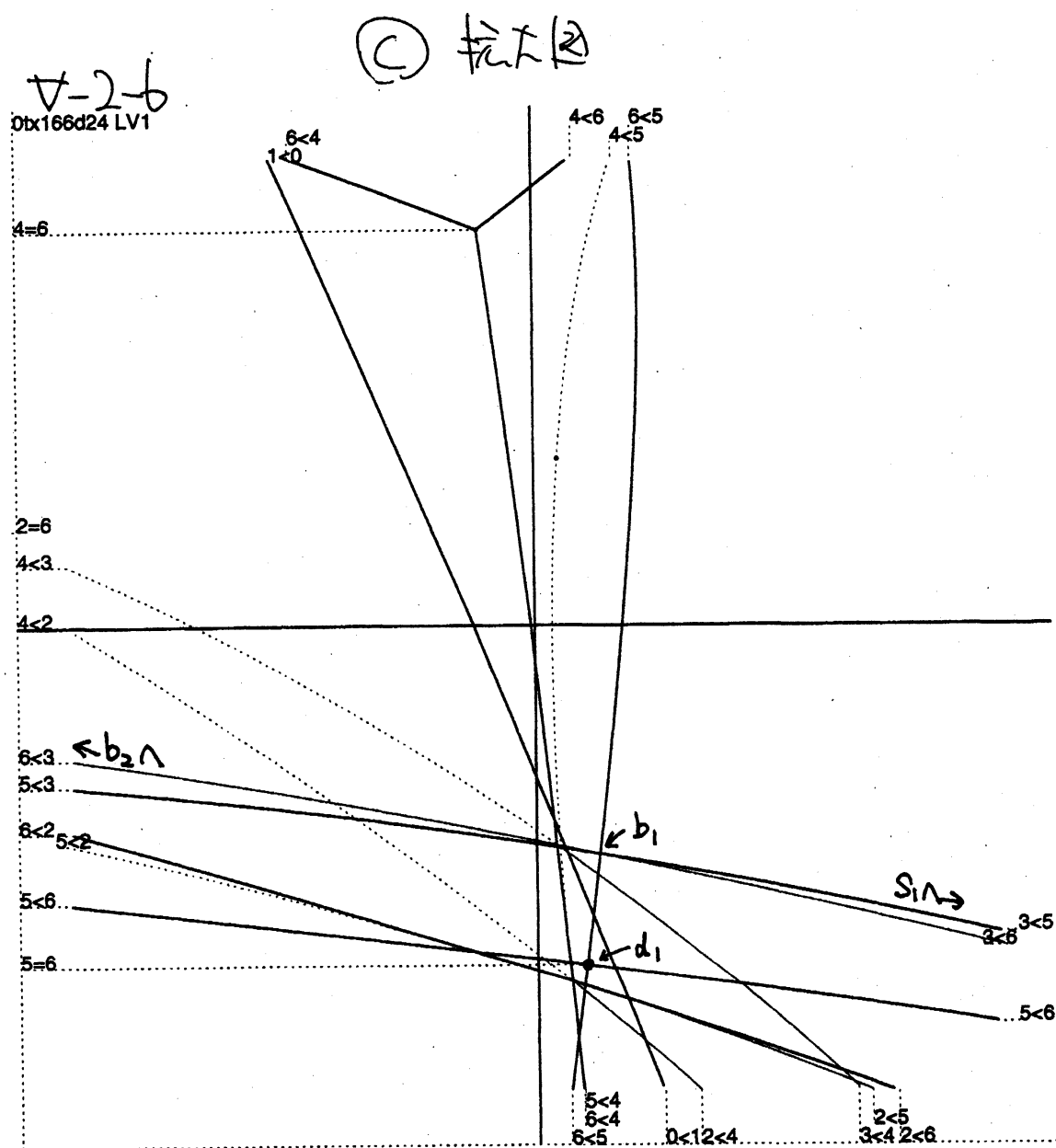
(C)

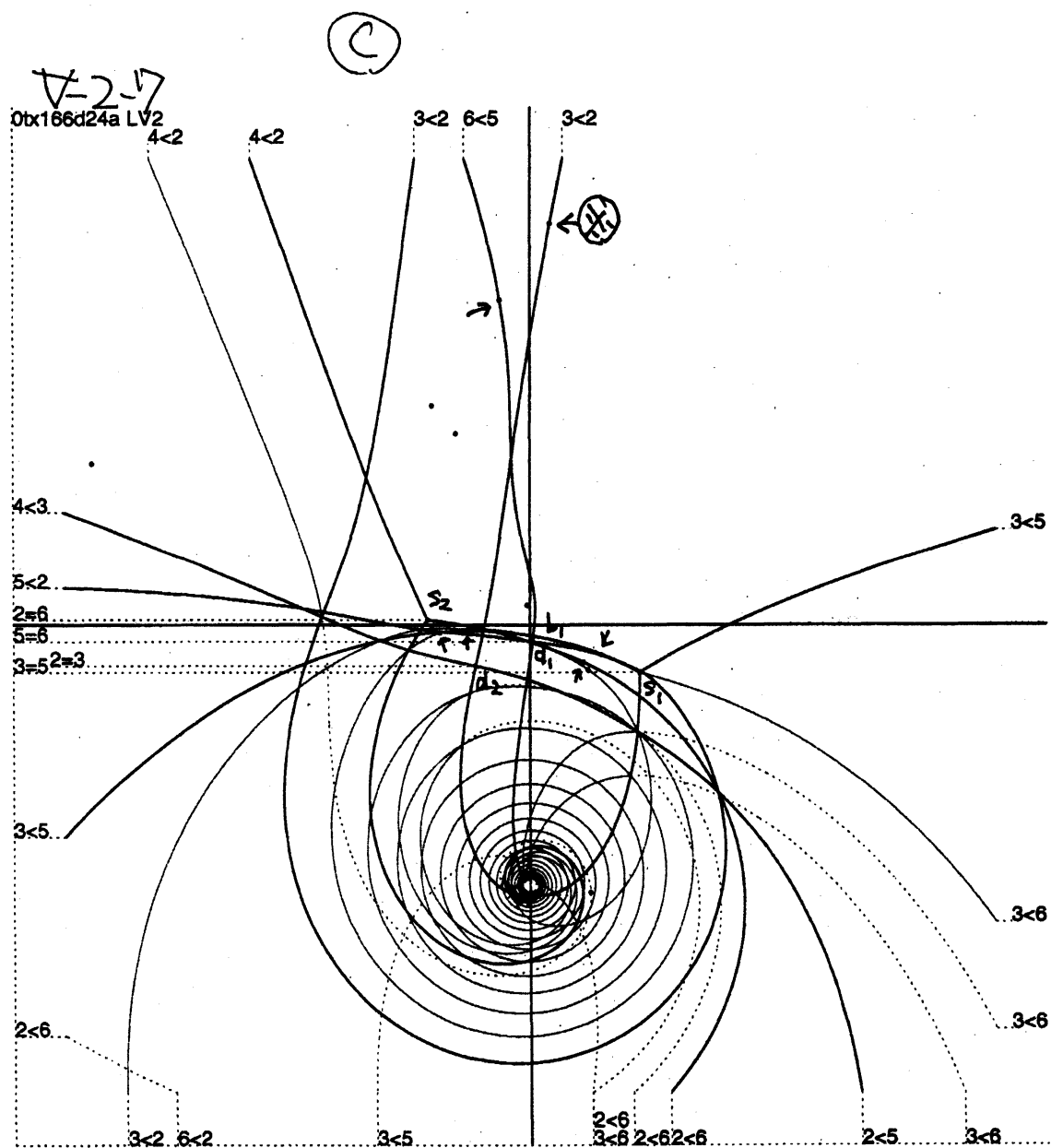
V-2-5



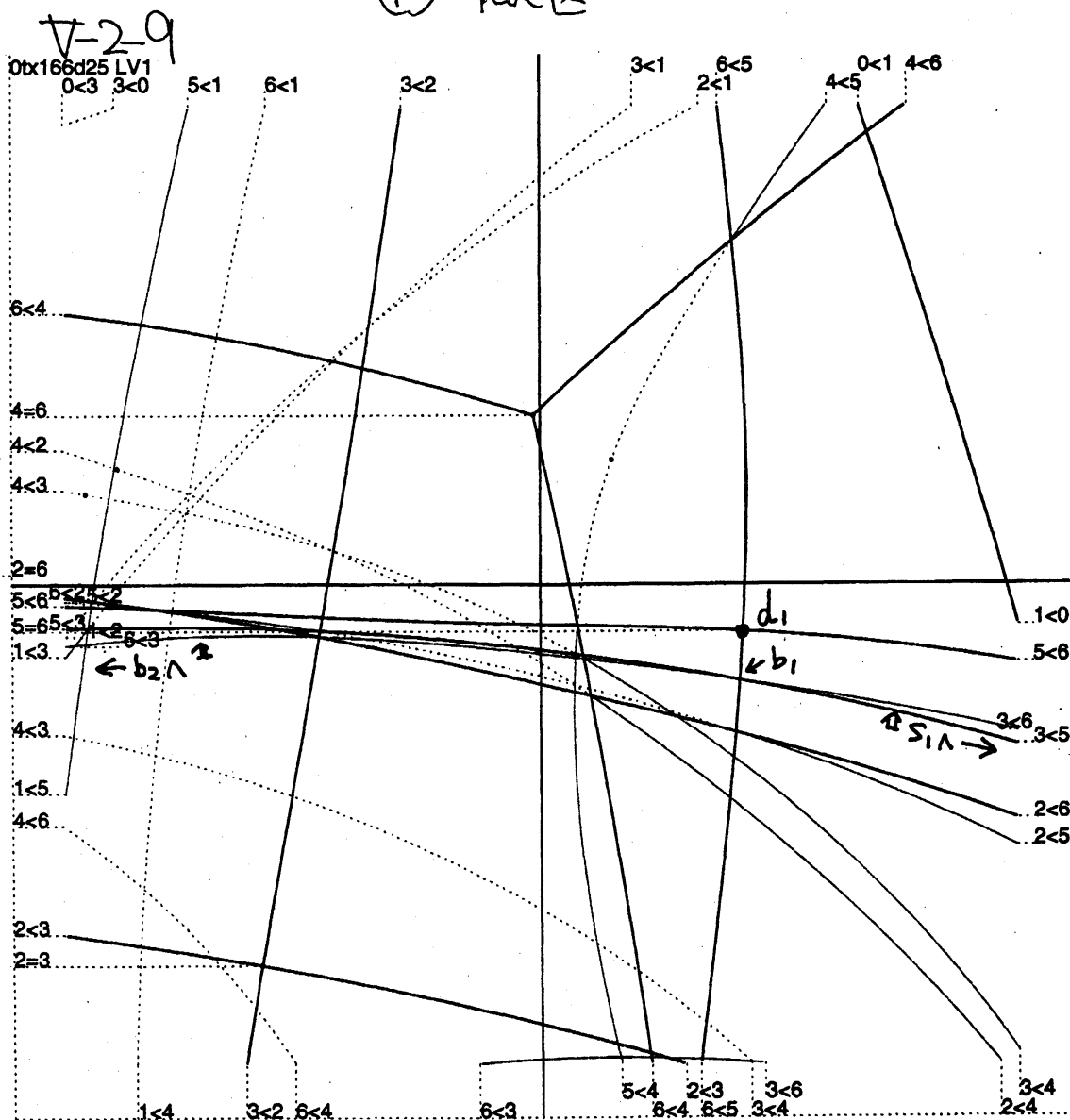
$b_1 d_1$ の長さを b_1 とする

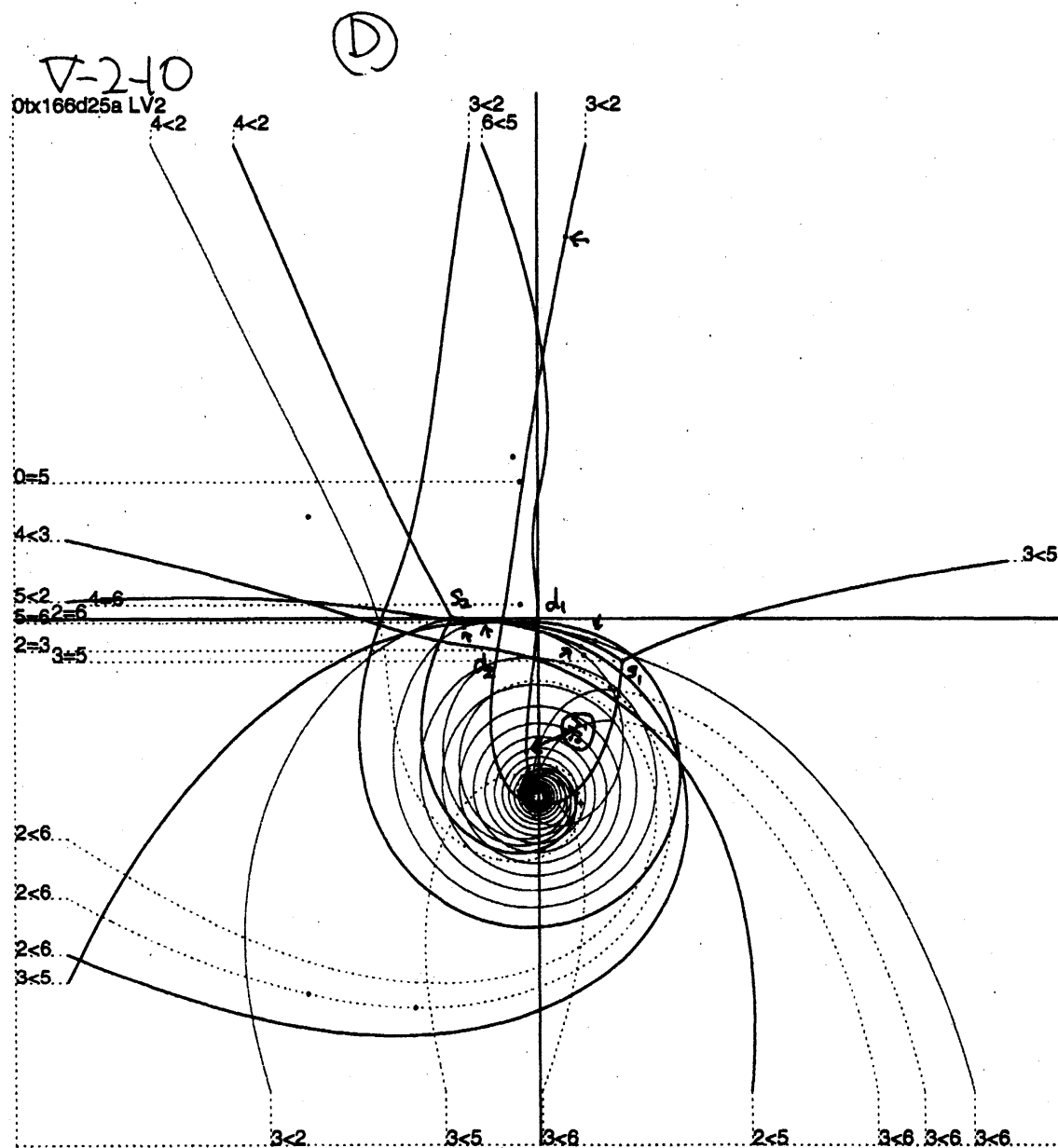
長さを b_1 とする





① 拉大

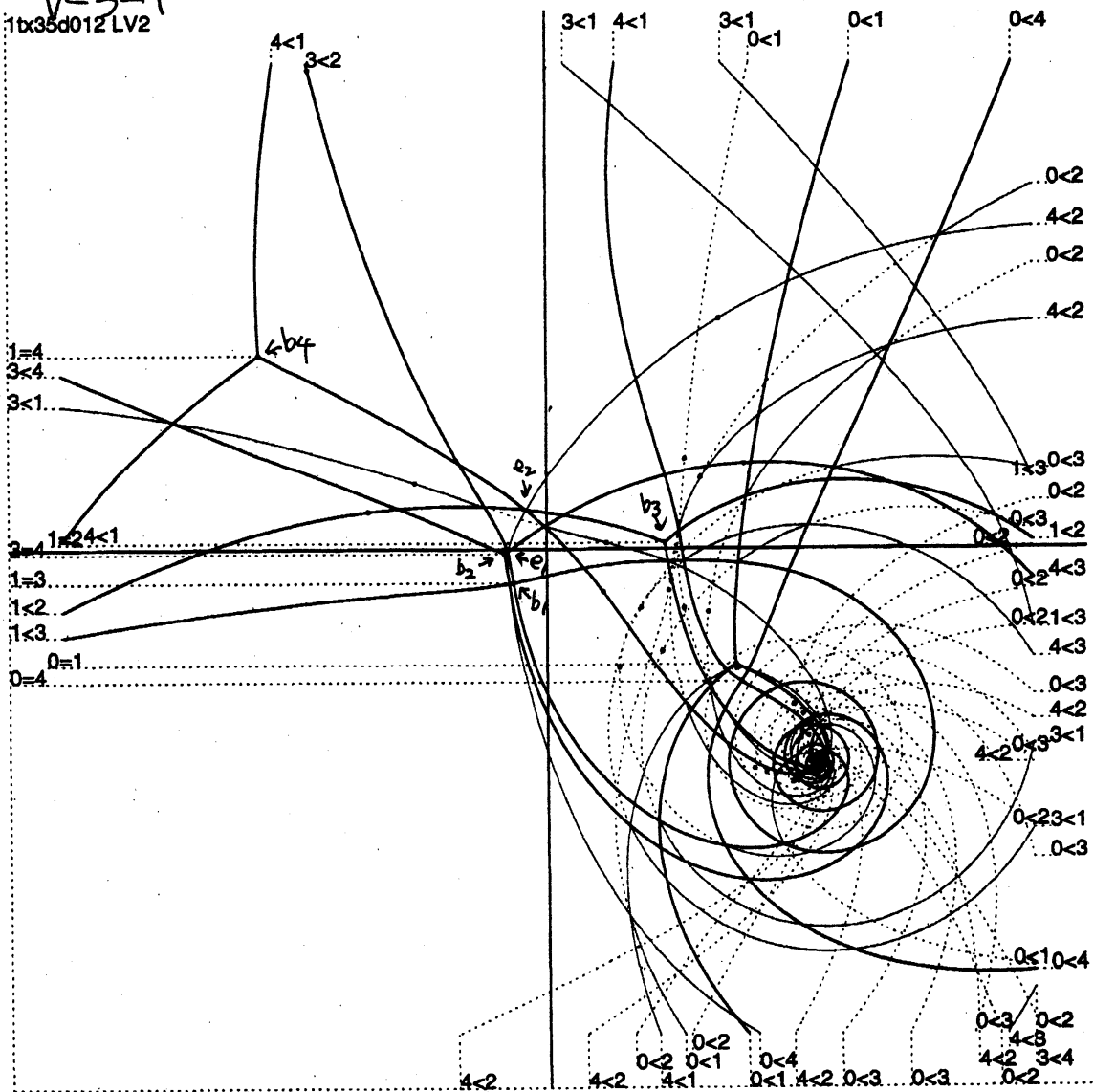




CASE(B-2) 例その1

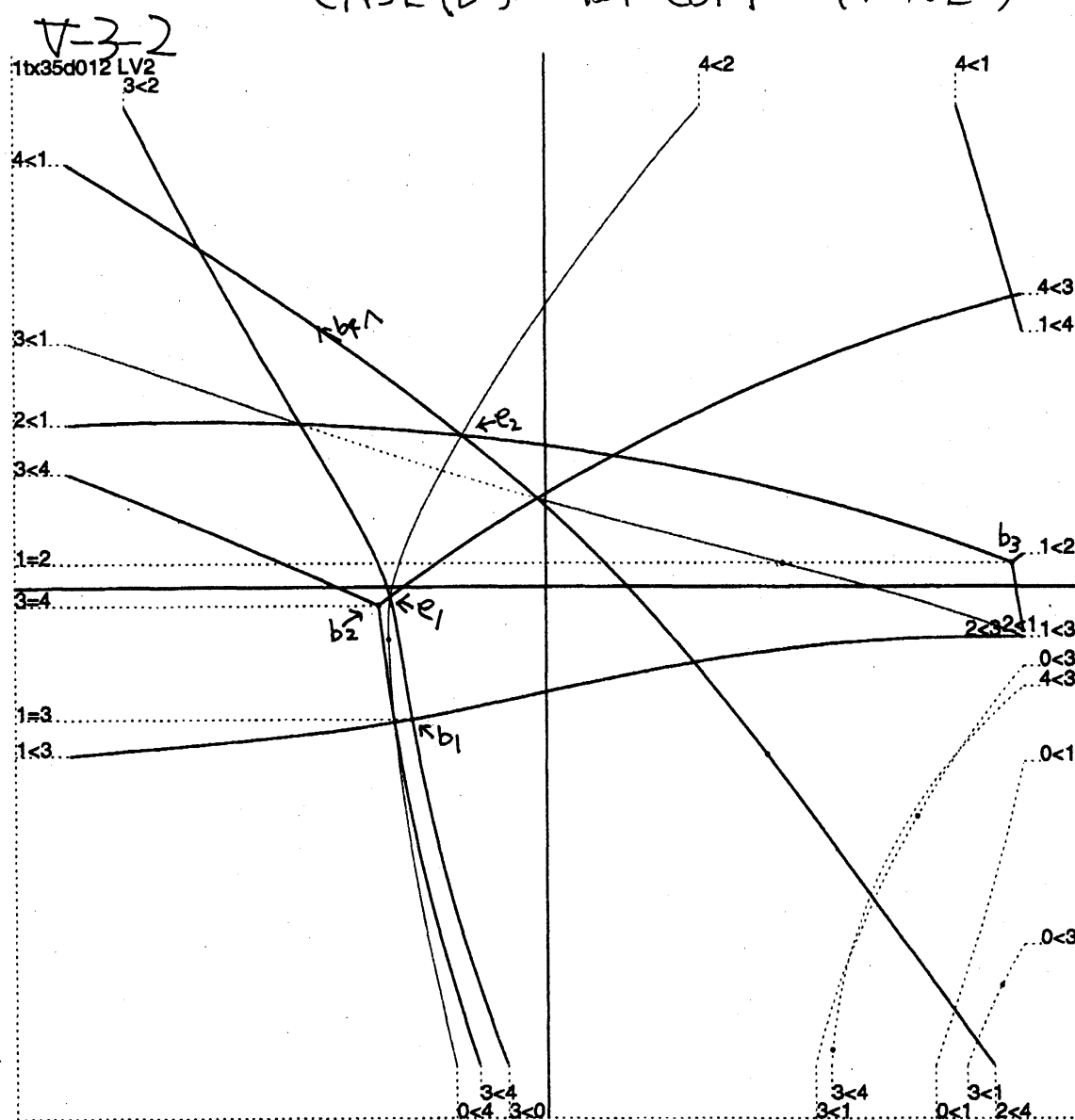
V-3-1

1tx35d012 LV2



位数 n の木 b_1, b_2, b_3, b_4
 分岐点からなるセグメントの長さが 0 になる/311
 (e_1, e_2)

CASE(B-2) 例 301 (拡大図)

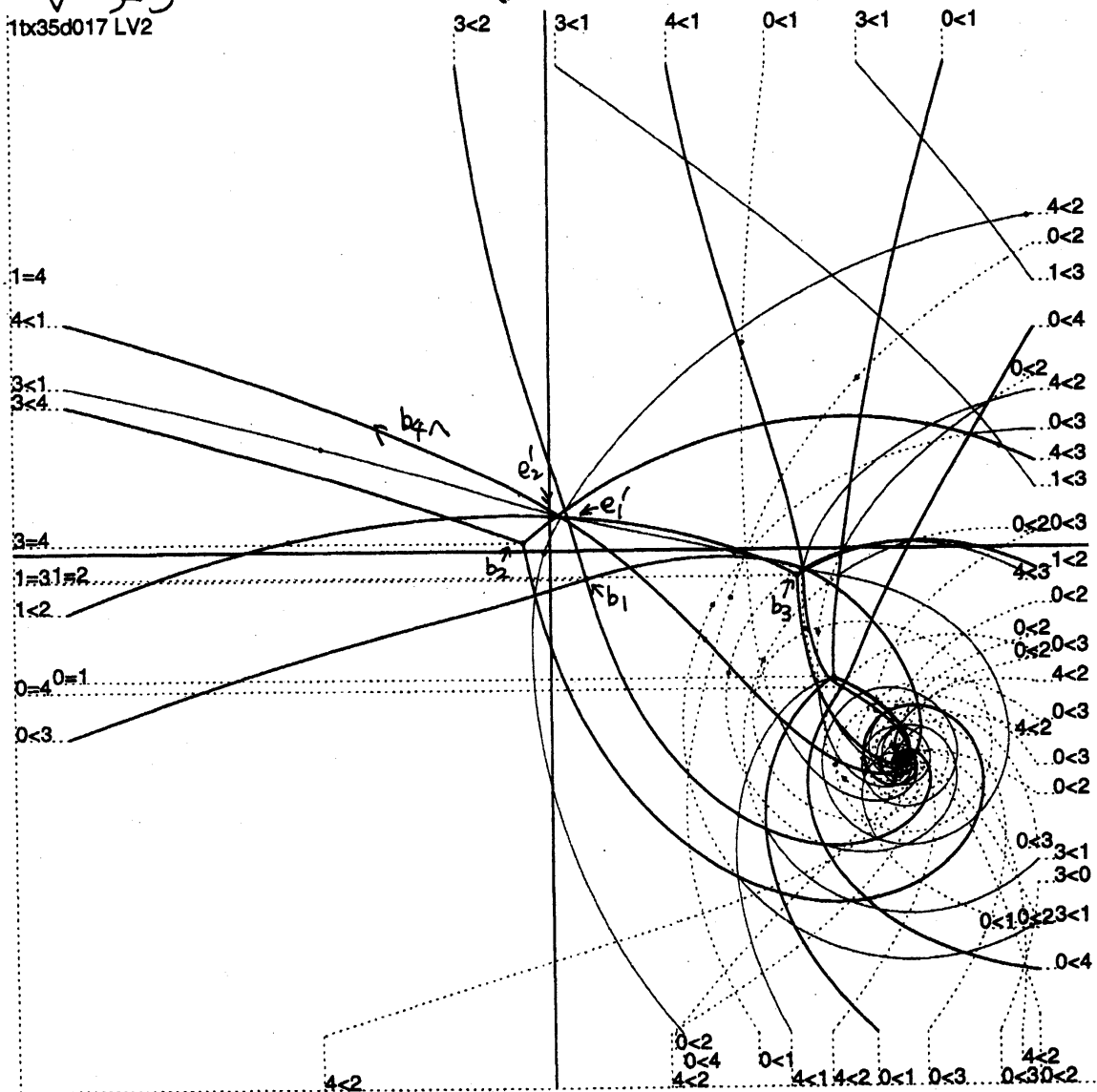


セグメント e_1, e_2 の長さが 0 になる

V-33

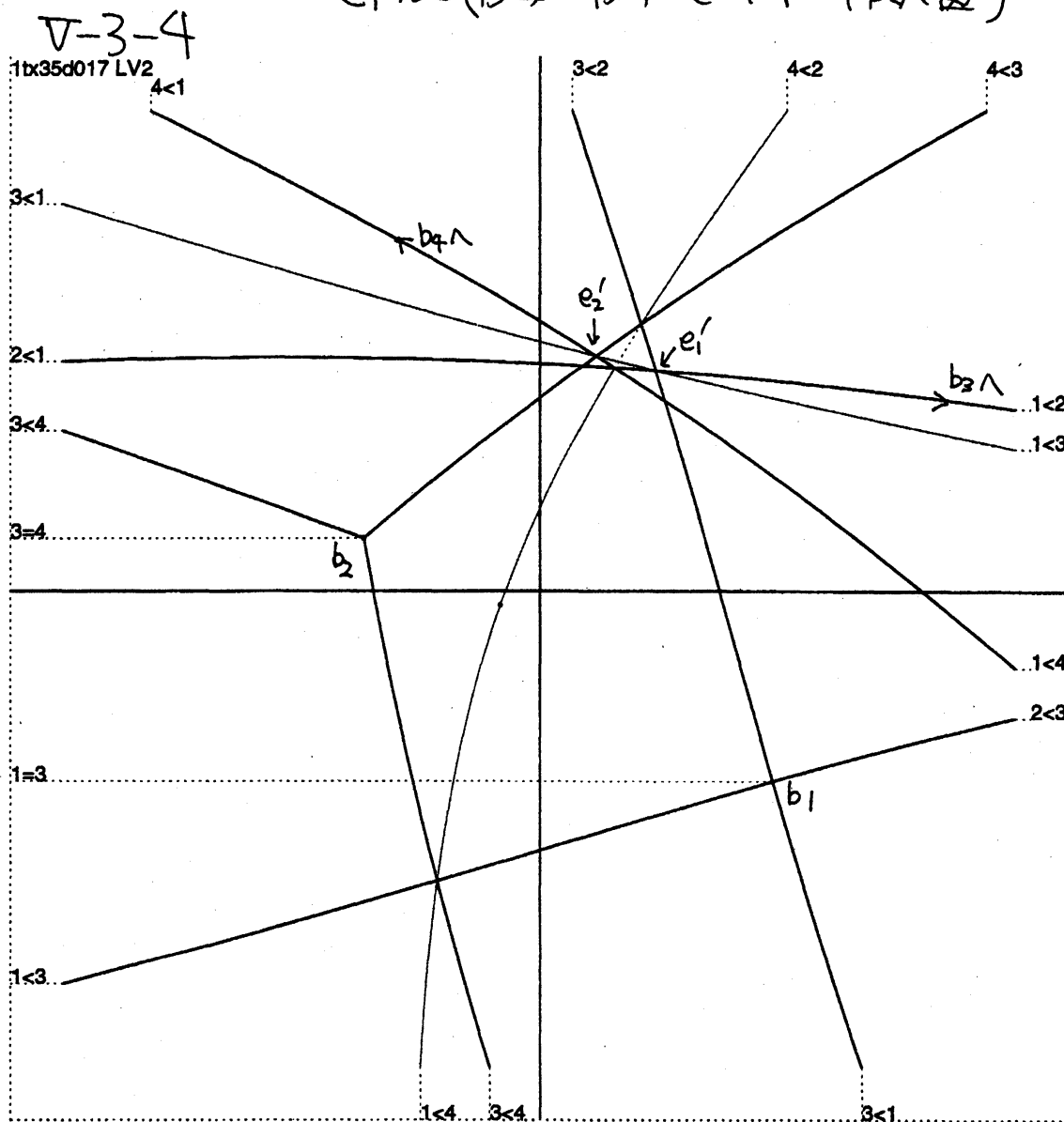
1bx35d017 LV2

CASE (B-2) 1311 2011

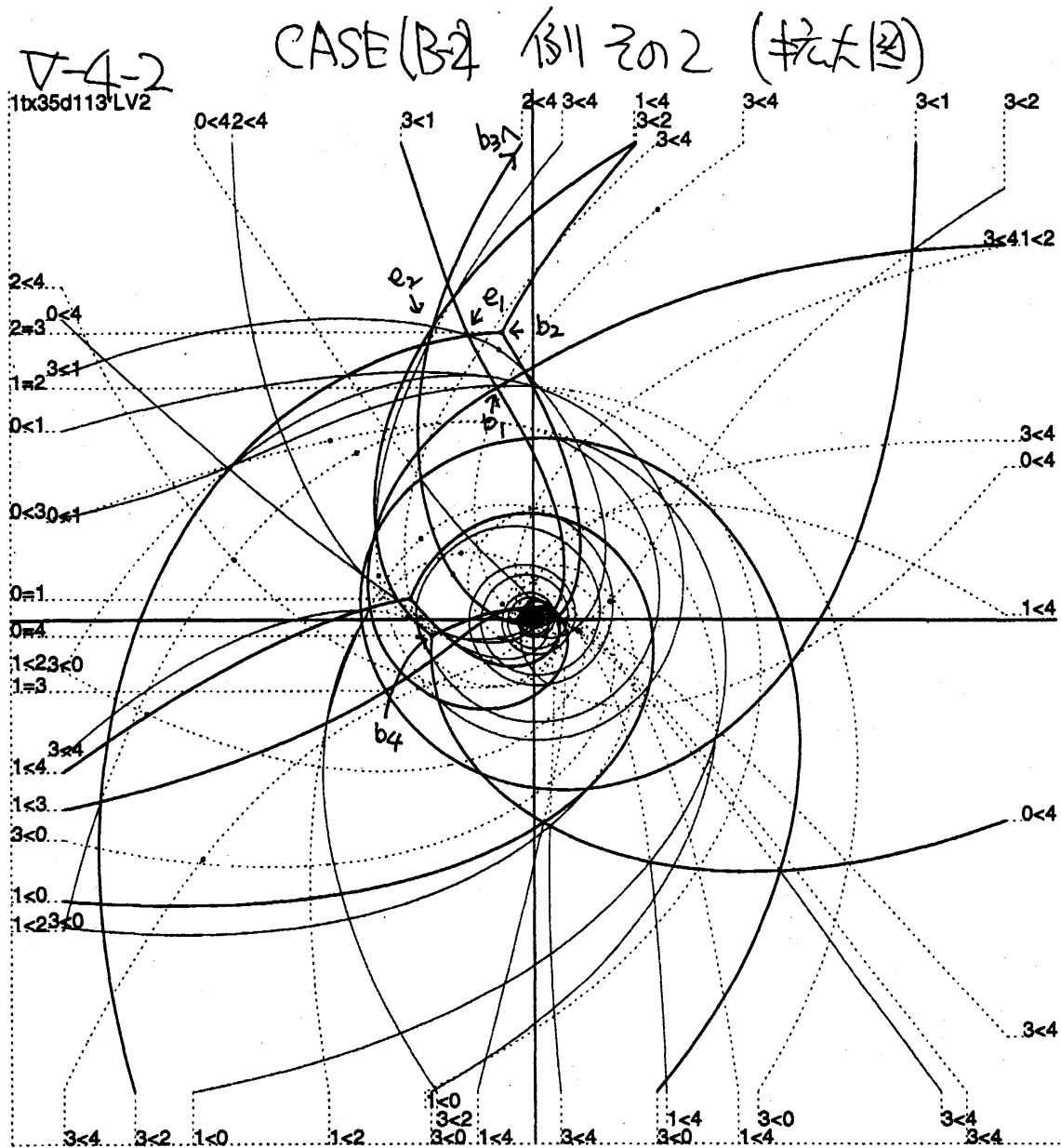


したがって e_1, e_2 の長さが 0 になる後

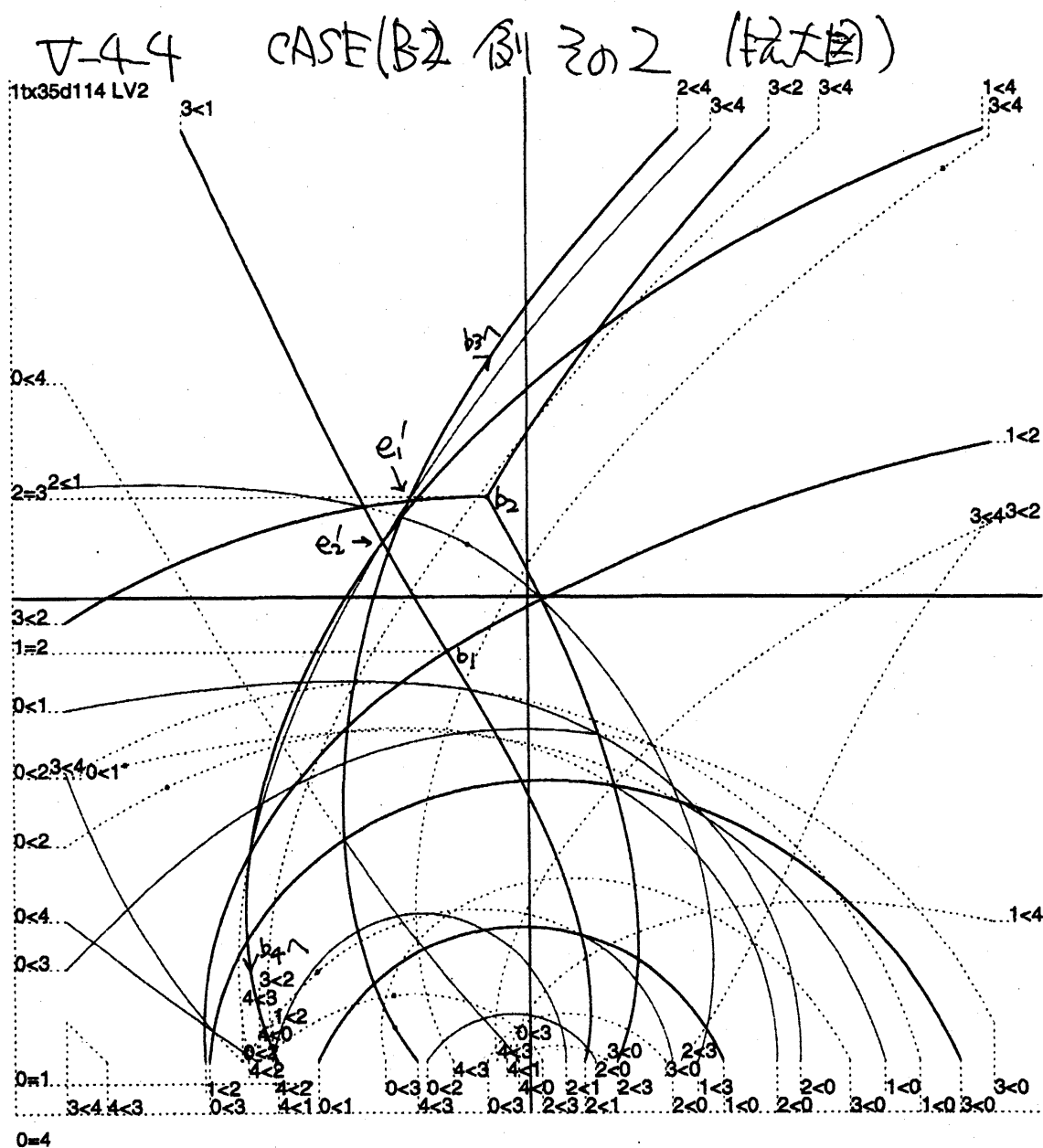
CASE(B-2) 131 301 (拡大図)



セグメントの交換 ($e_1 e_2 \rightarrow e_1' e_2'$) があきるか
 位数 4 の本は 存続する



位数 4 の木 b_1, b_2, b_3, b_4
 e_1, e_2 の長さが 0 になる



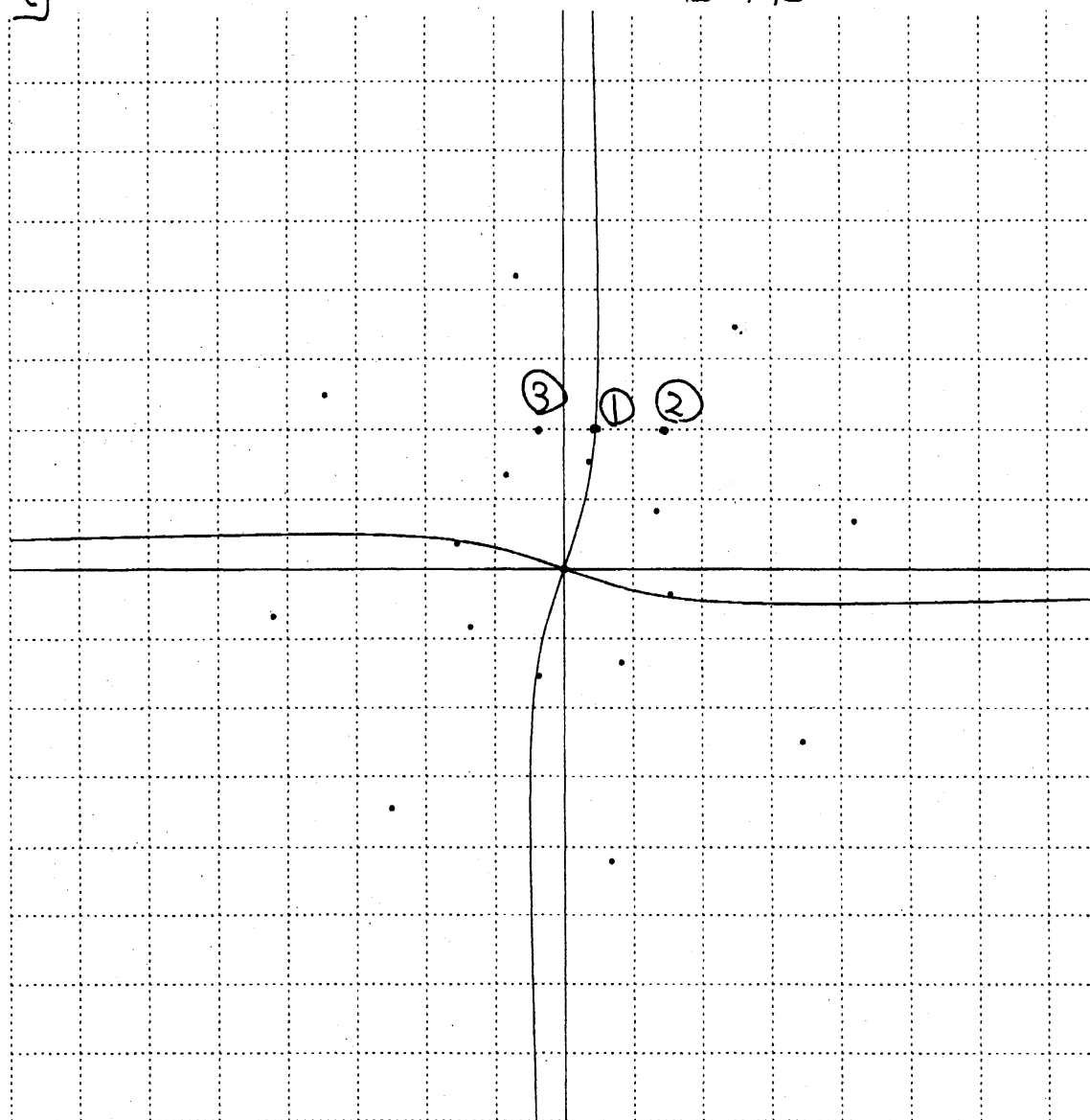
VI. NY 奇数系の原点

NY 奇数系の $t = 0$ におけるリーマン面は特別な形をしている。 $t = 0$ 上の点は、幾つかは無限遠点であり、残りは分岐度 3 の分岐点となる（通常分岐点分岐度 2 である）。

この分岐点は、本来の定義では変わり点とは言えないが（特性多項式の根が発散するので）、リーマン面の分岐点であることから第 1 種変わり点と考える事が出来る。

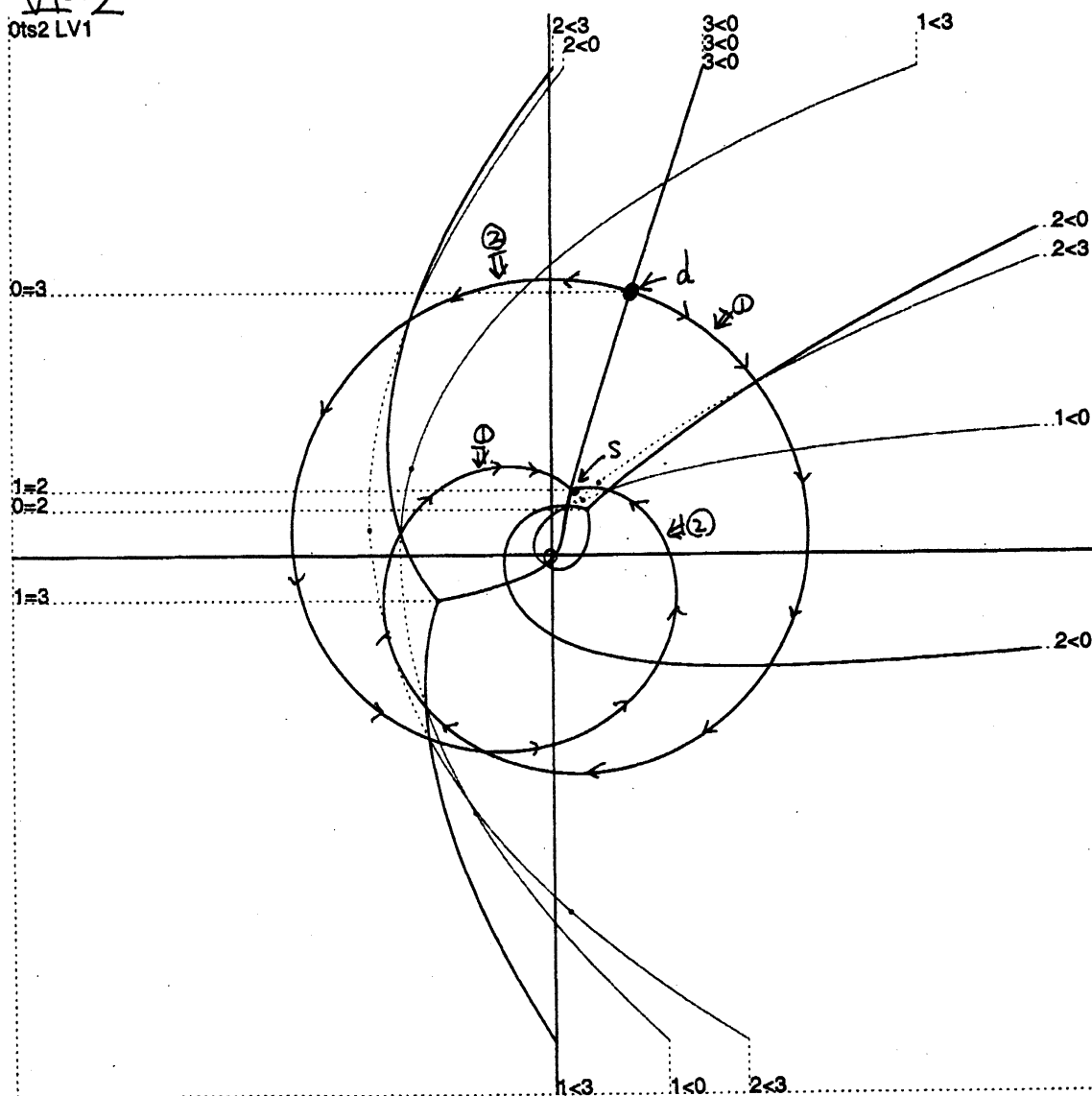
更に、特性多項式の根は $t^{-\frac{2}{3}}$ のオーダーで発散する事が一般論から判る。従って、ストークス曲線を定義する積分式は広義積分の意味で確定する。

この立場で計算すると原点からは 4 本のストークス曲線が派生する事が判る。また、各ストークス曲線上の点での線形方程式のストークス幾何は、ある simple turning point と double turning point が 2 つのストークス曲線で結ばれているという現象が見られる。つまり、枝点と同じ 2 つの位数 2 の有効双方向 2 分木が同時に存在している。

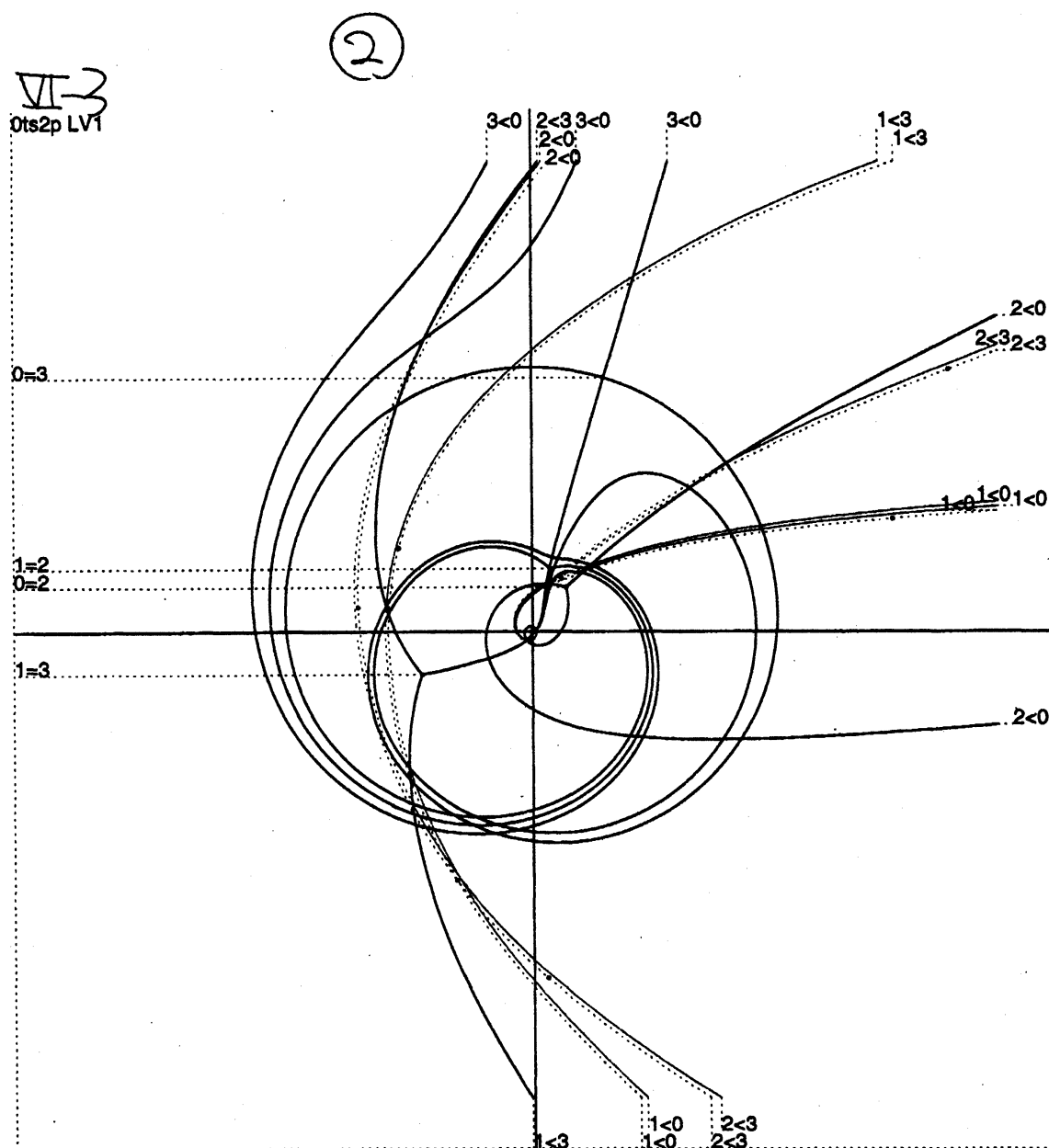
VI-1
丁NY3 原点から出る4本の
Stokes曲線

VI-2
Ots2 LV1

①

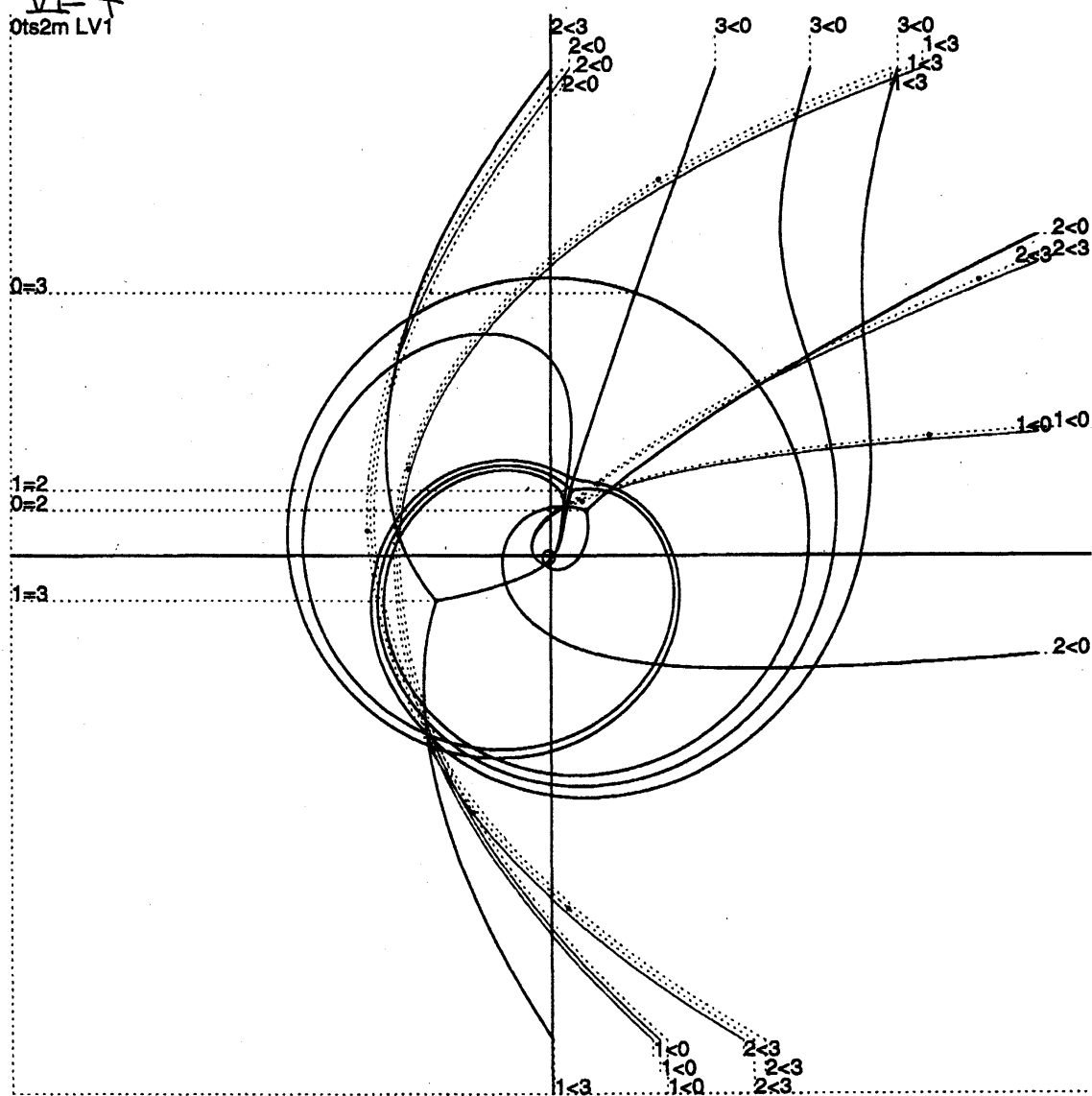


dとs ①, ②の2つのStokes曲線
で区別される。



VI-4
0ts2m LV1

③



VII. 非連結成分

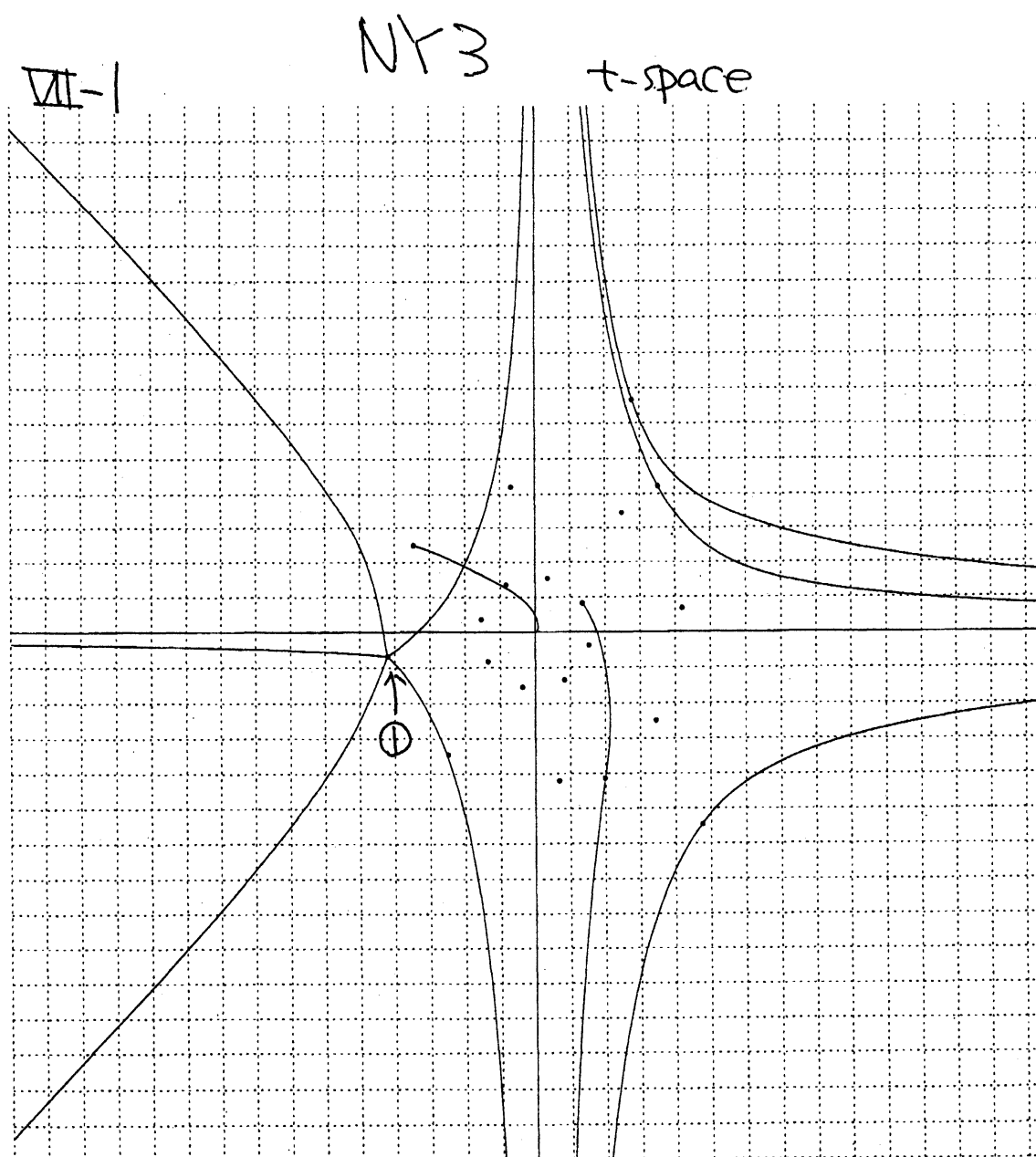
(最近は定義が少々変わったが) 非線形方程式のストークス曲線は

$$\operatorname{Im} \int_{t_0}^t \lambda_i - \lambda_j dt = 0$$

という積分式で与えられる (λ_i, λ_j は線形化方程式の特性方程式の根)。この式は、変わり点 t_0 を含む連結成分の他に、全く変わり点を含まない多数の連結成分を持つ。このような非連結成分上で有効双方向2分木が存在するか調べてみる。結論は

1. double turning point とある仮想変わり点が直接結ばれている。
2. 枝点が全て通常の変わり点である2分木が存在する。
3. しかし、この2分木は双方向木でない (もちろん、有効でもない)。
4. t を非連結成分上からはずしてみても、有効単方向木は1つもみられない。

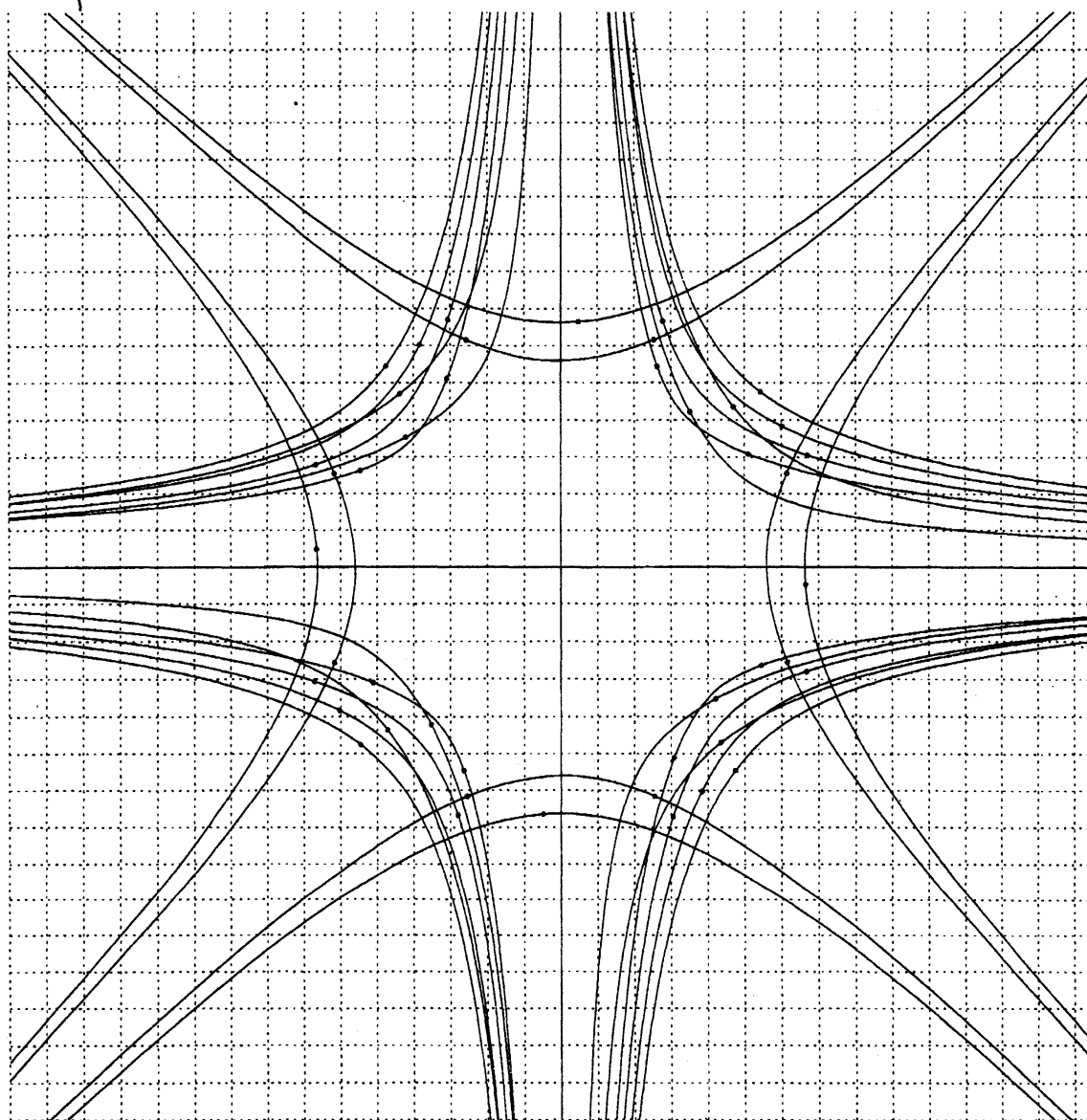
という事がわかる。よって、この非連結成分は指導指針の意味でストークス曲線とは言えない事が判る。



変換点 ① から、放射状 π - χ 非連続成分
 を求めた

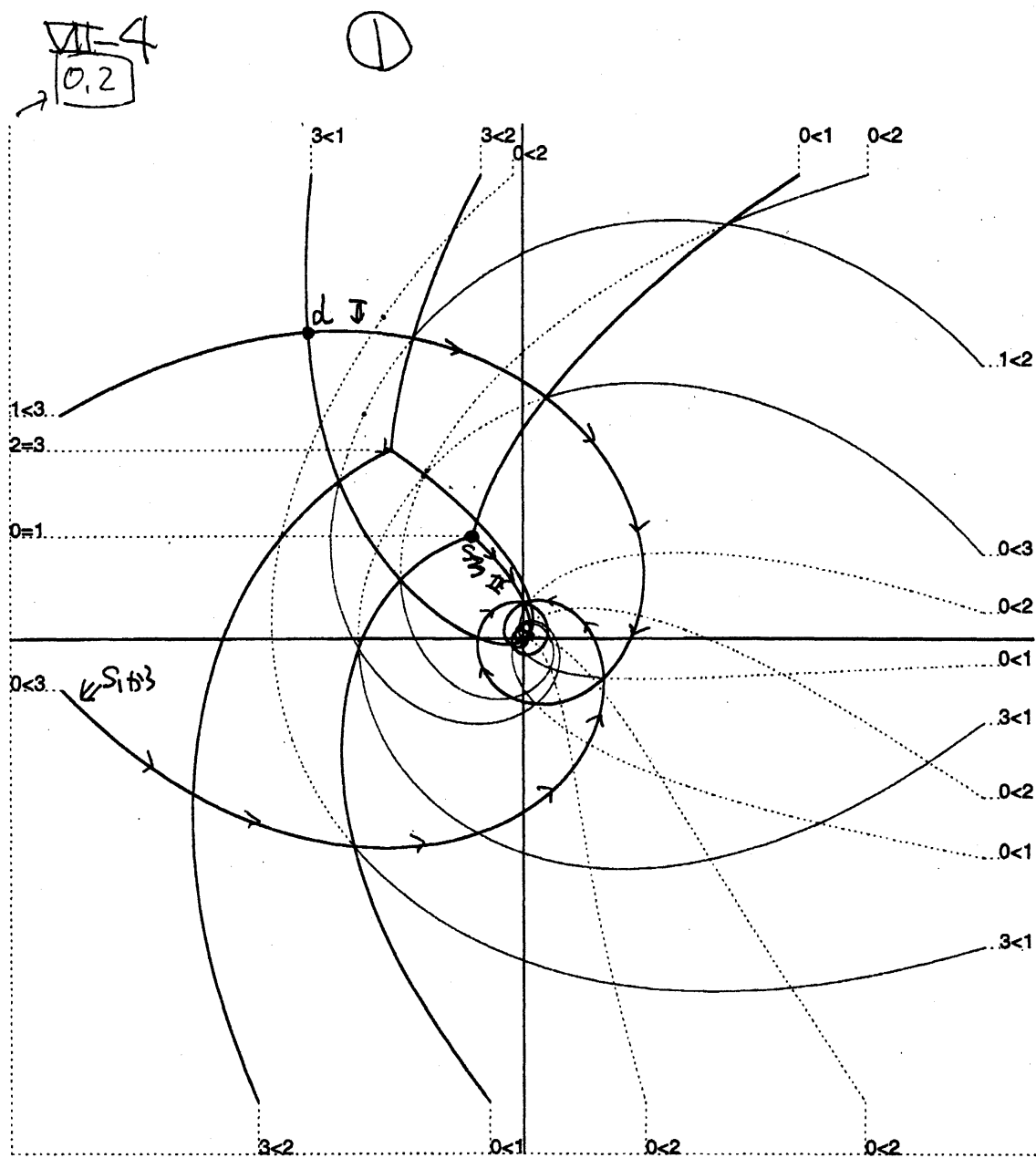
Ⅶ-2
t-plane

NY3



非連系成分のみとり出した。点は
(みかた)仮想きり点。

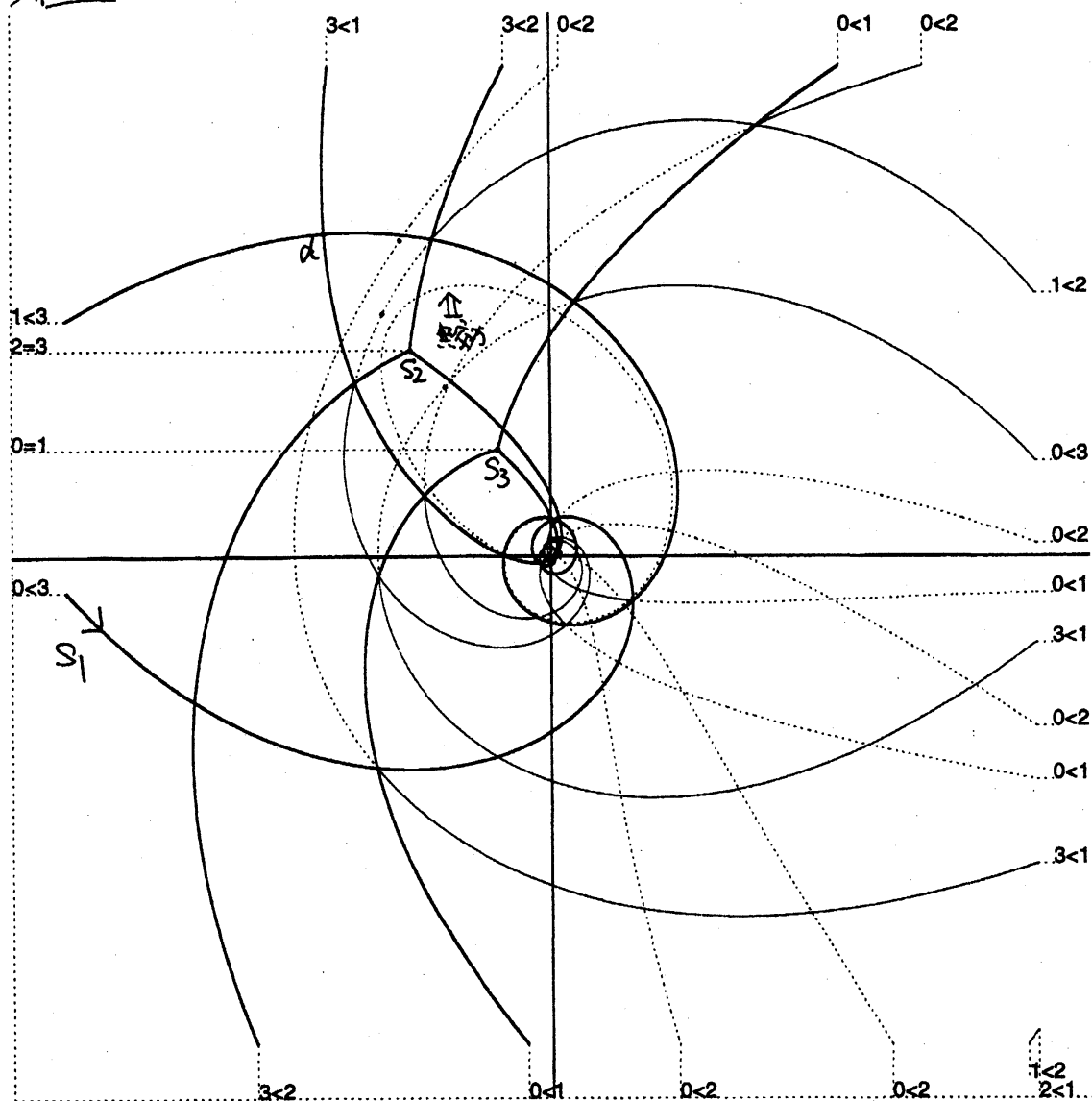
Hvooovoo WZ



1+0 000 000 002



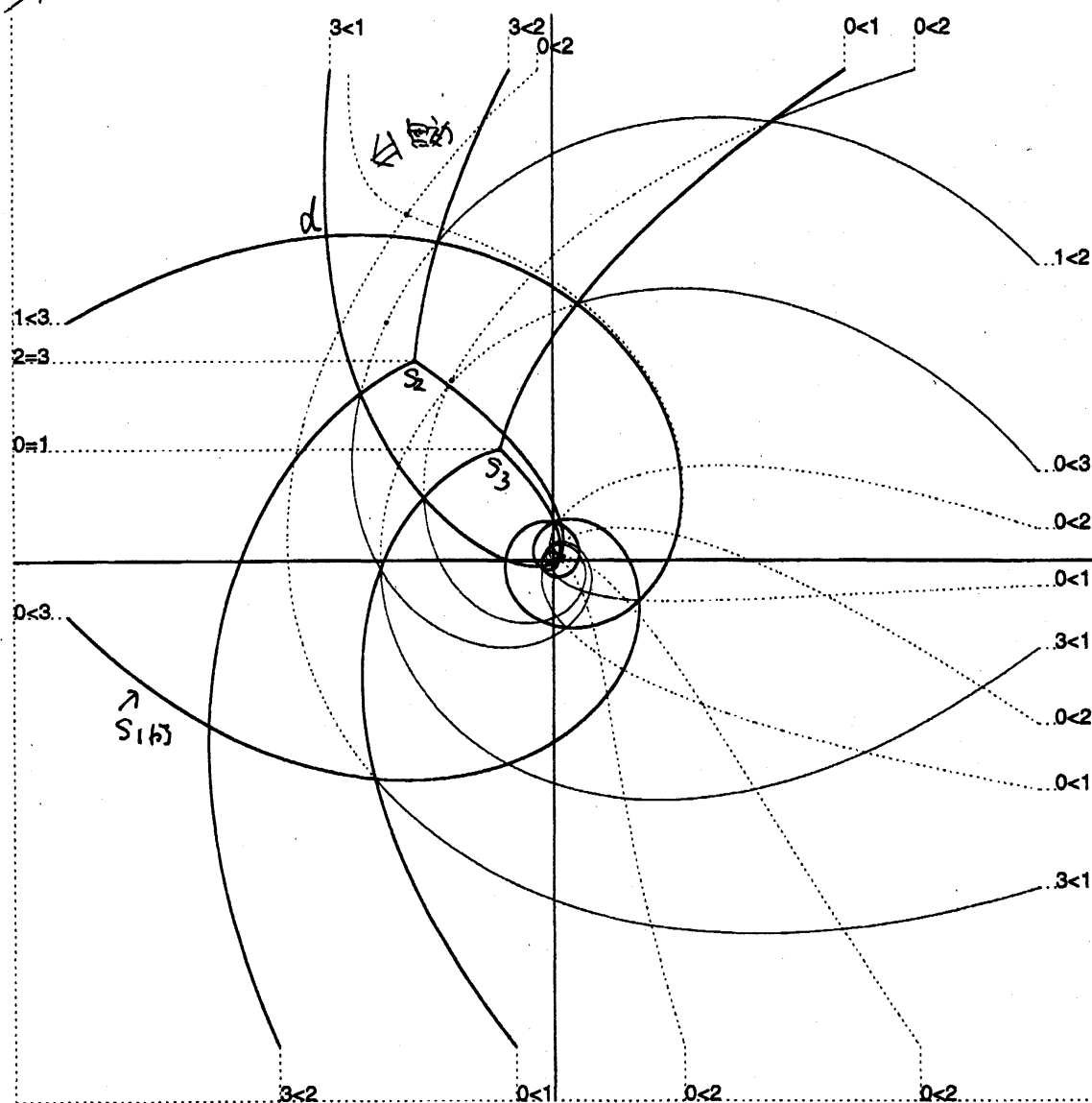
② 有効単方向木はない



170000000002

$\boxed{0,2}$ - 8
 \rightarrow

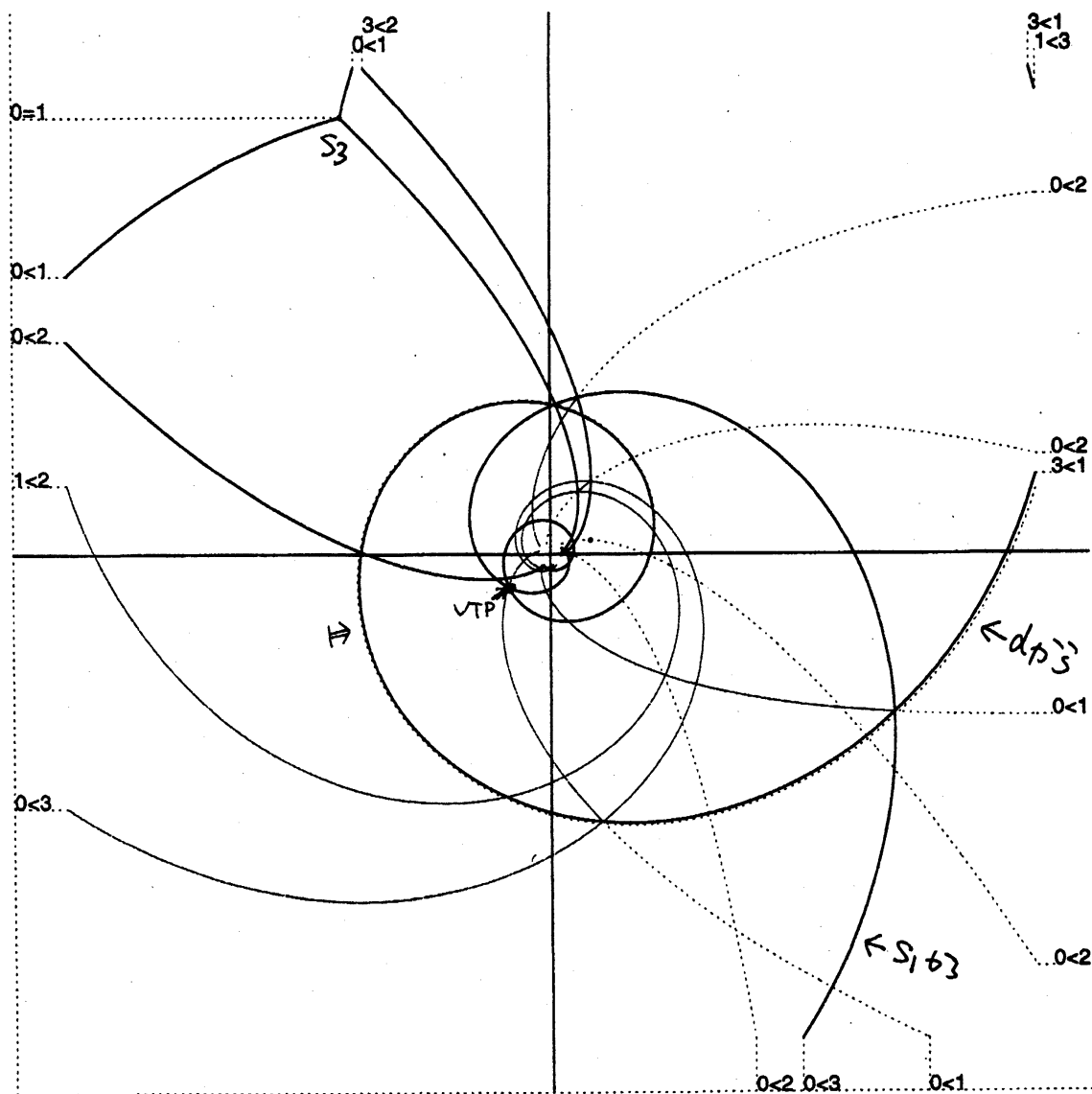
③ 有効単方向本はない



Hiroshima 02

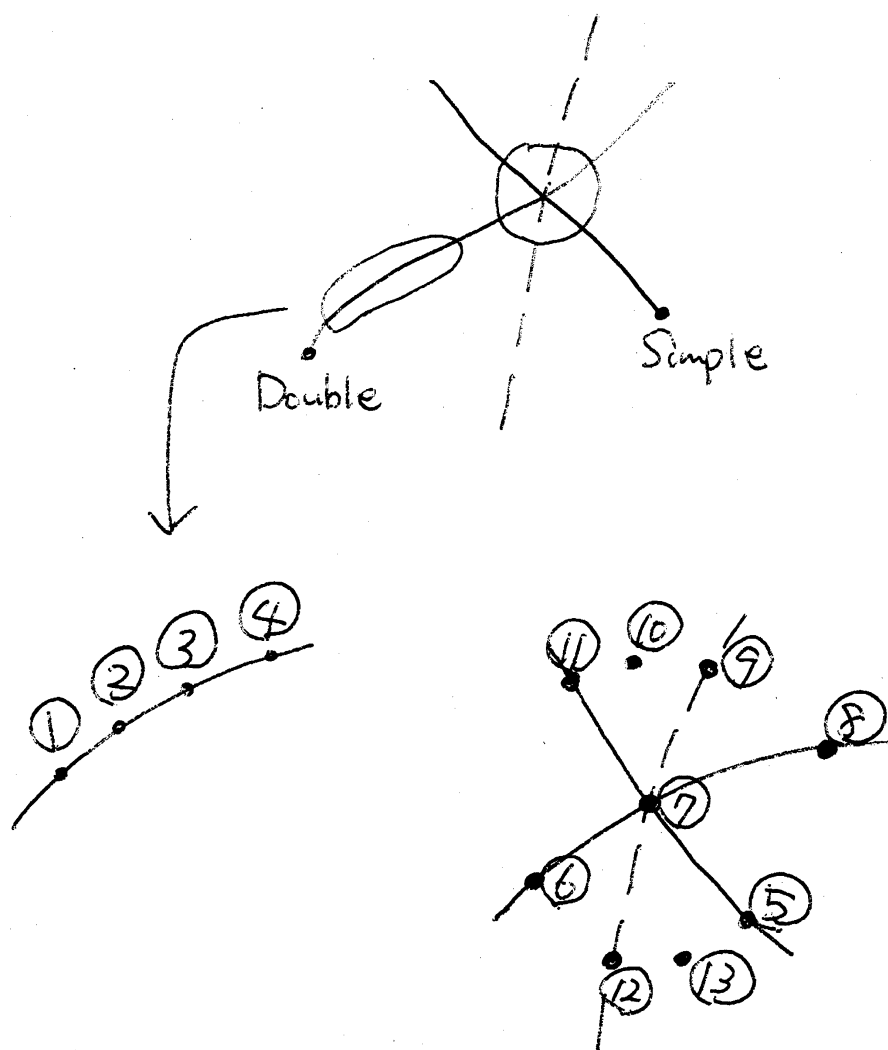


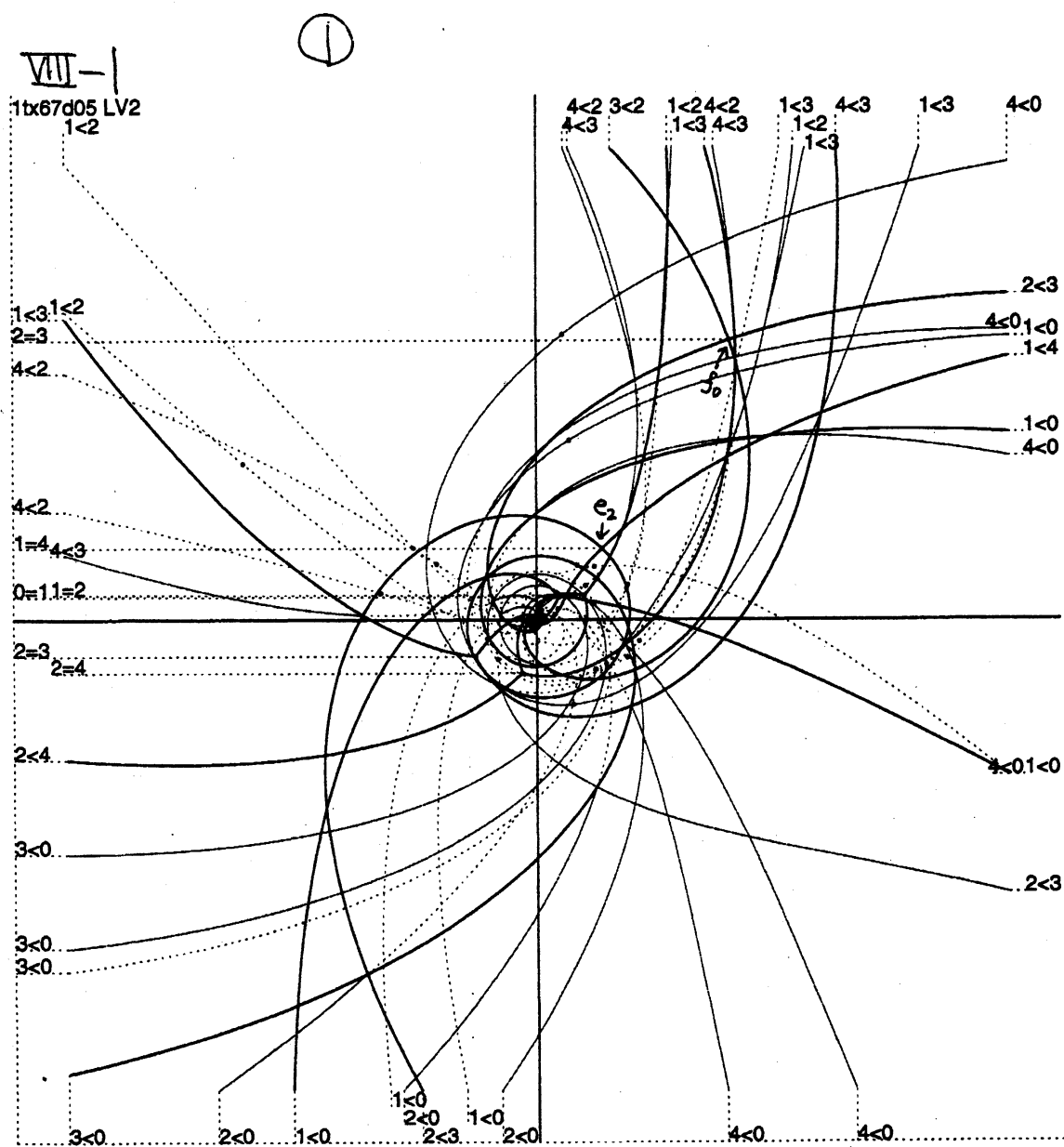
③ 拡大図



VIII. その他

比較的大きな位数を持つ2つの木に関する西川現象の例を挙げる。

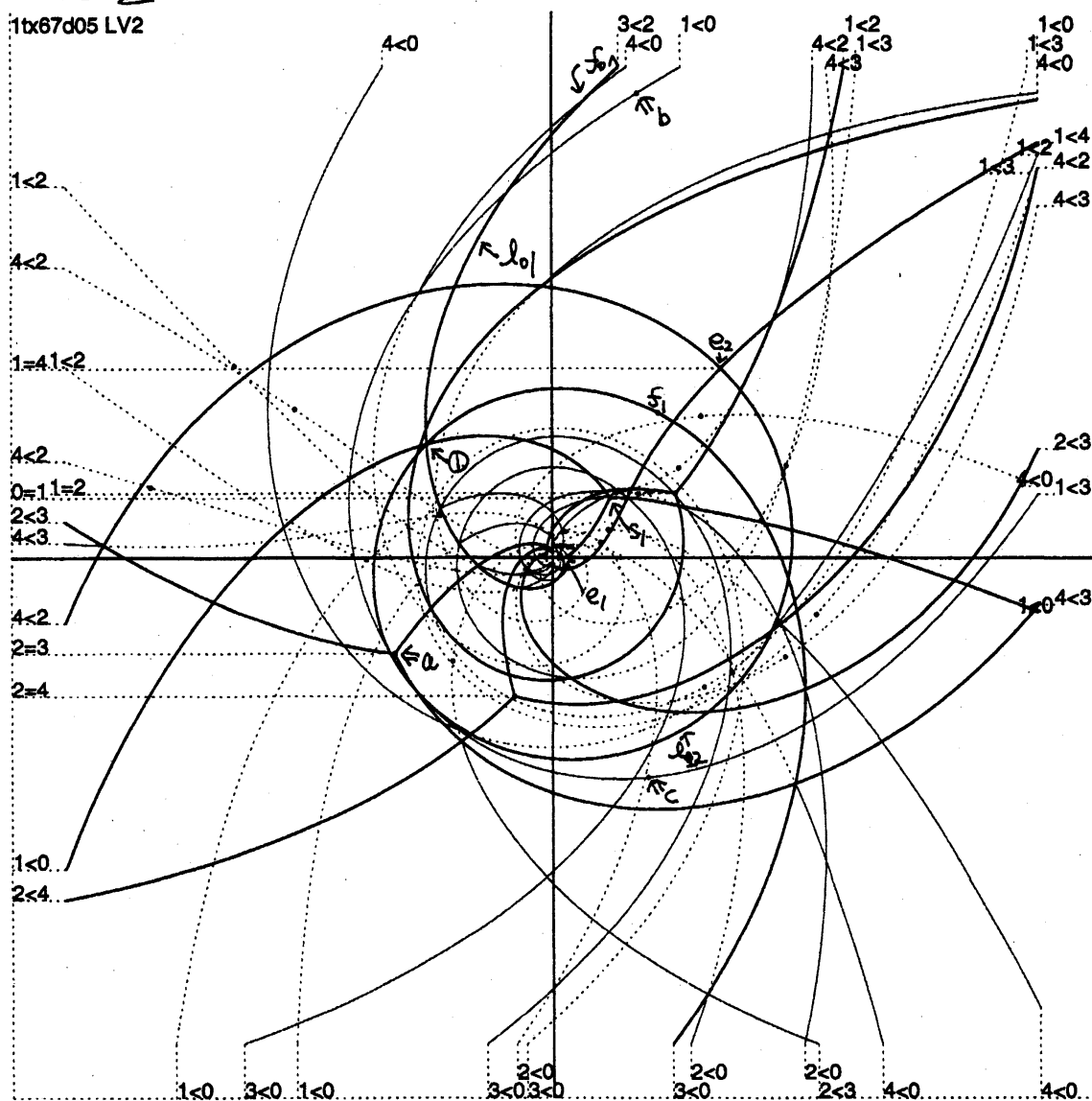




VIII-2

① 柱状图

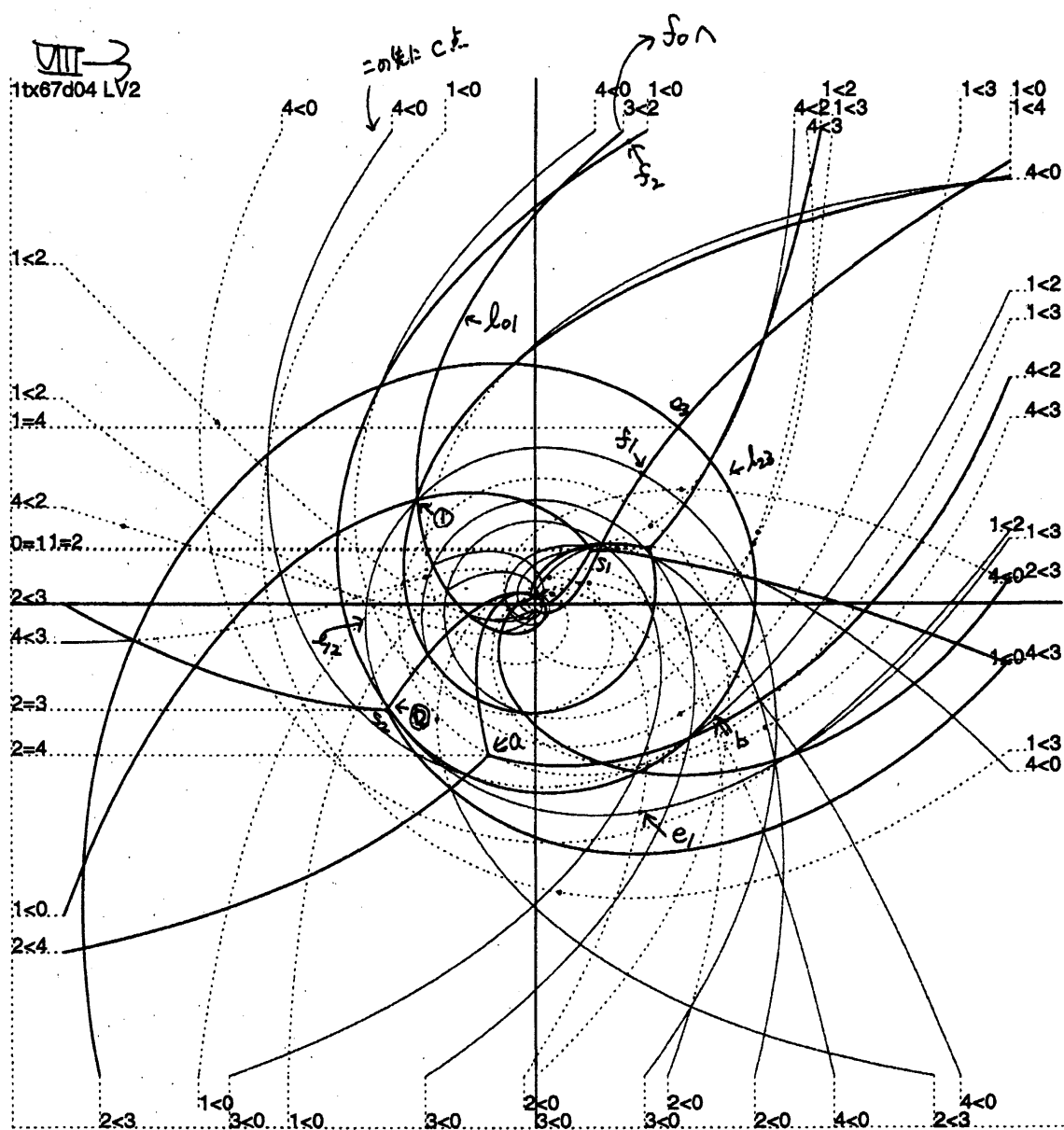
1x67d05 LV2



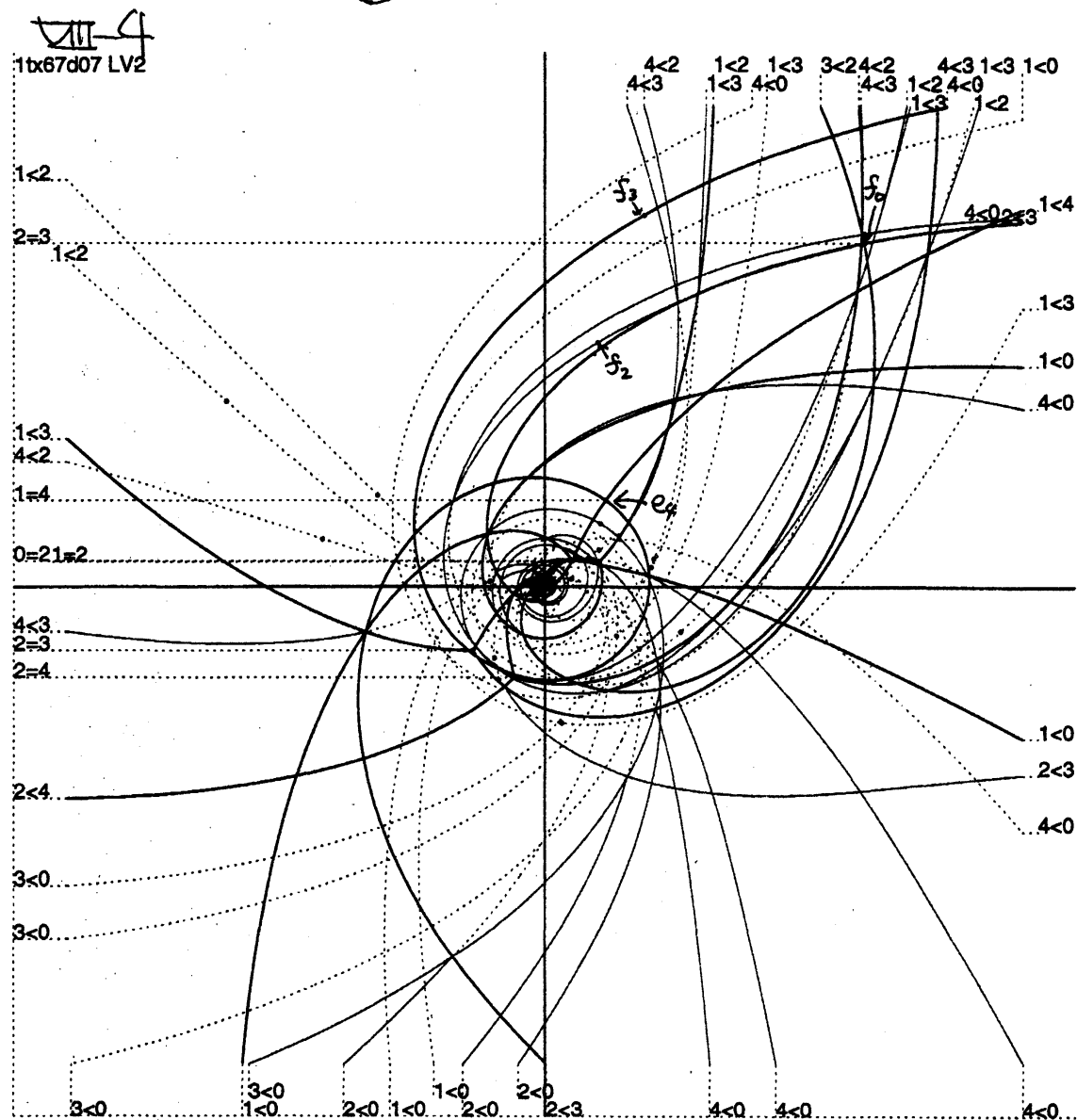
②

VIII-3
bx67d04 LV

1tx67d04 LV2



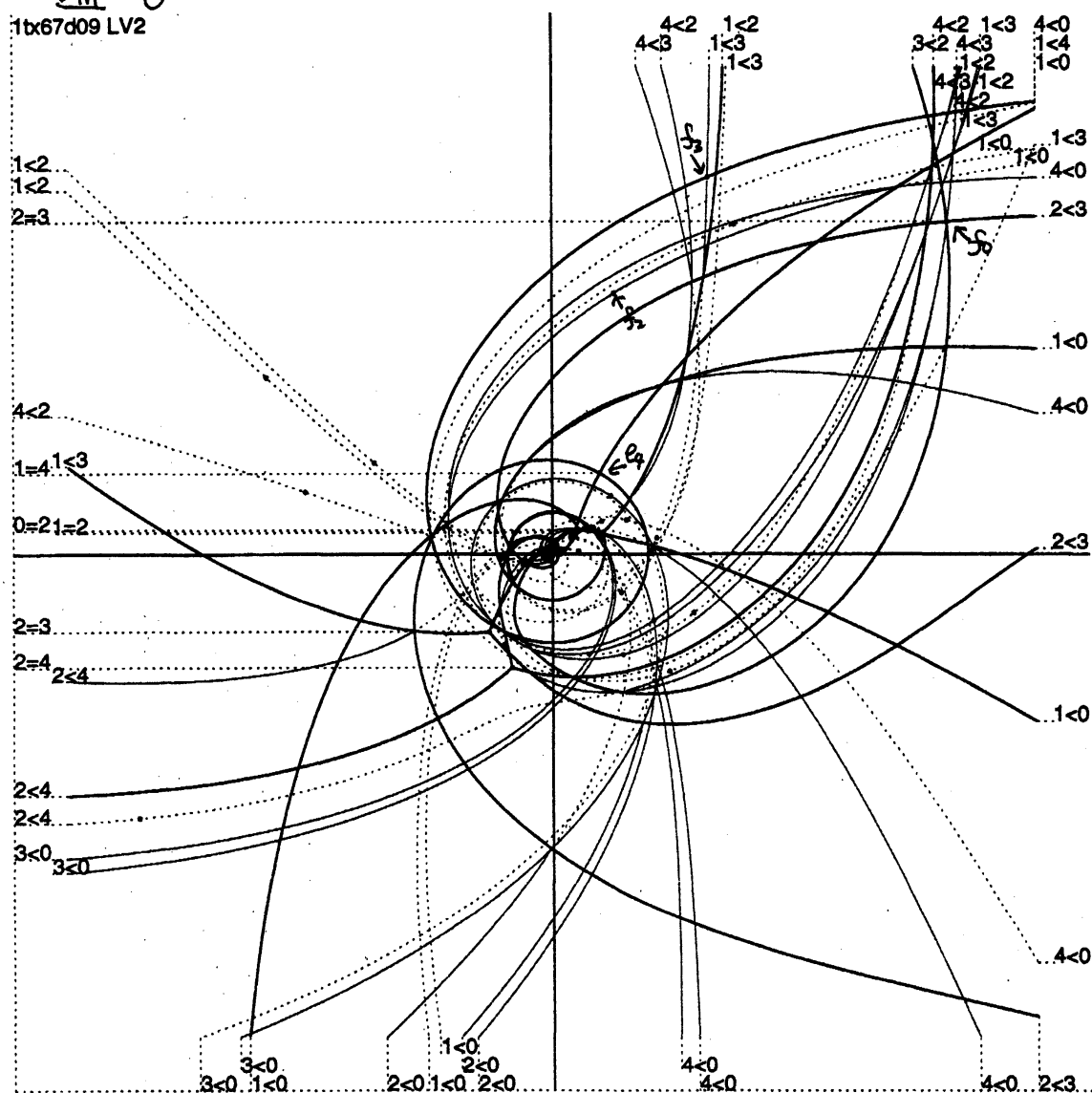
③

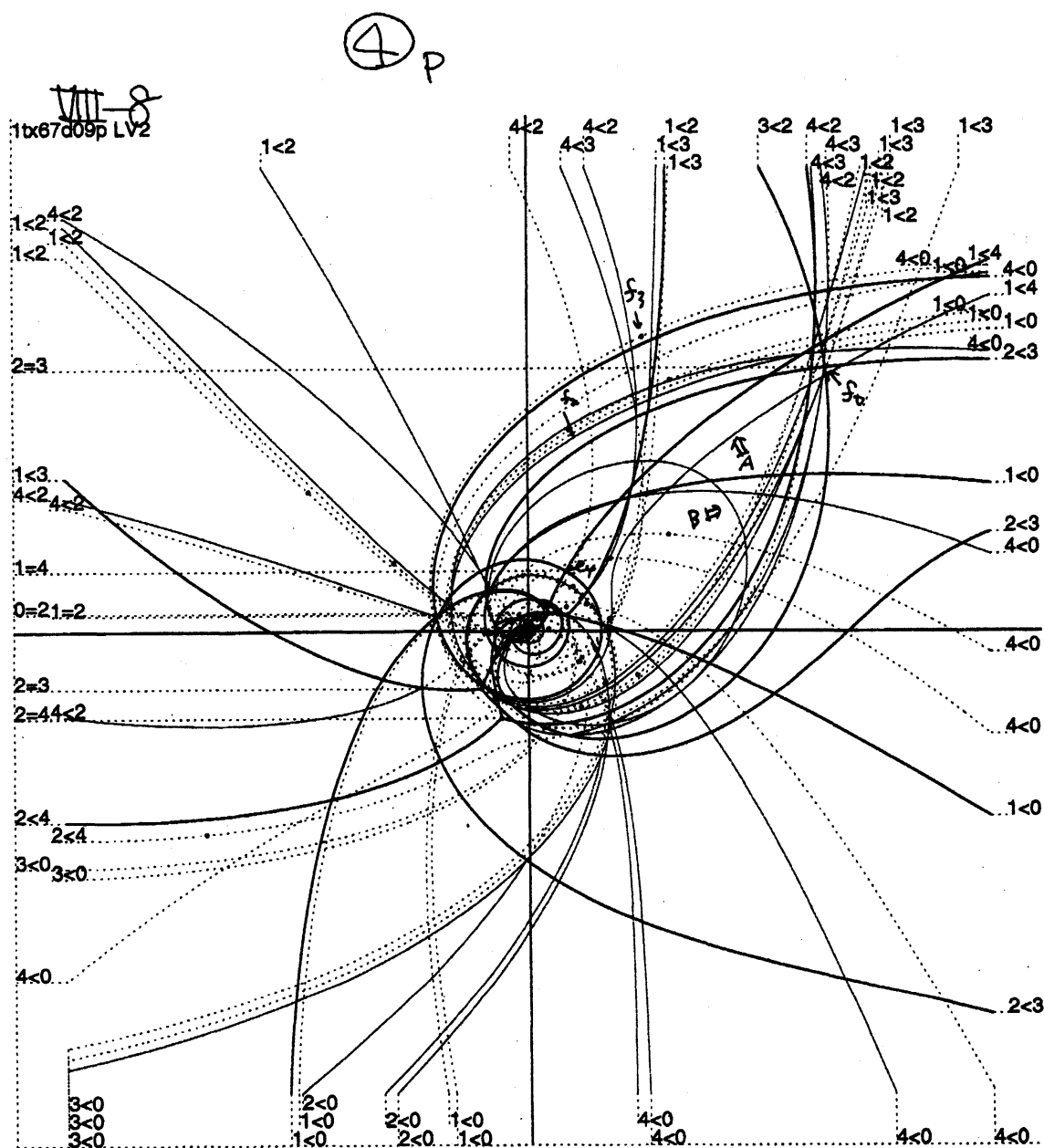


④

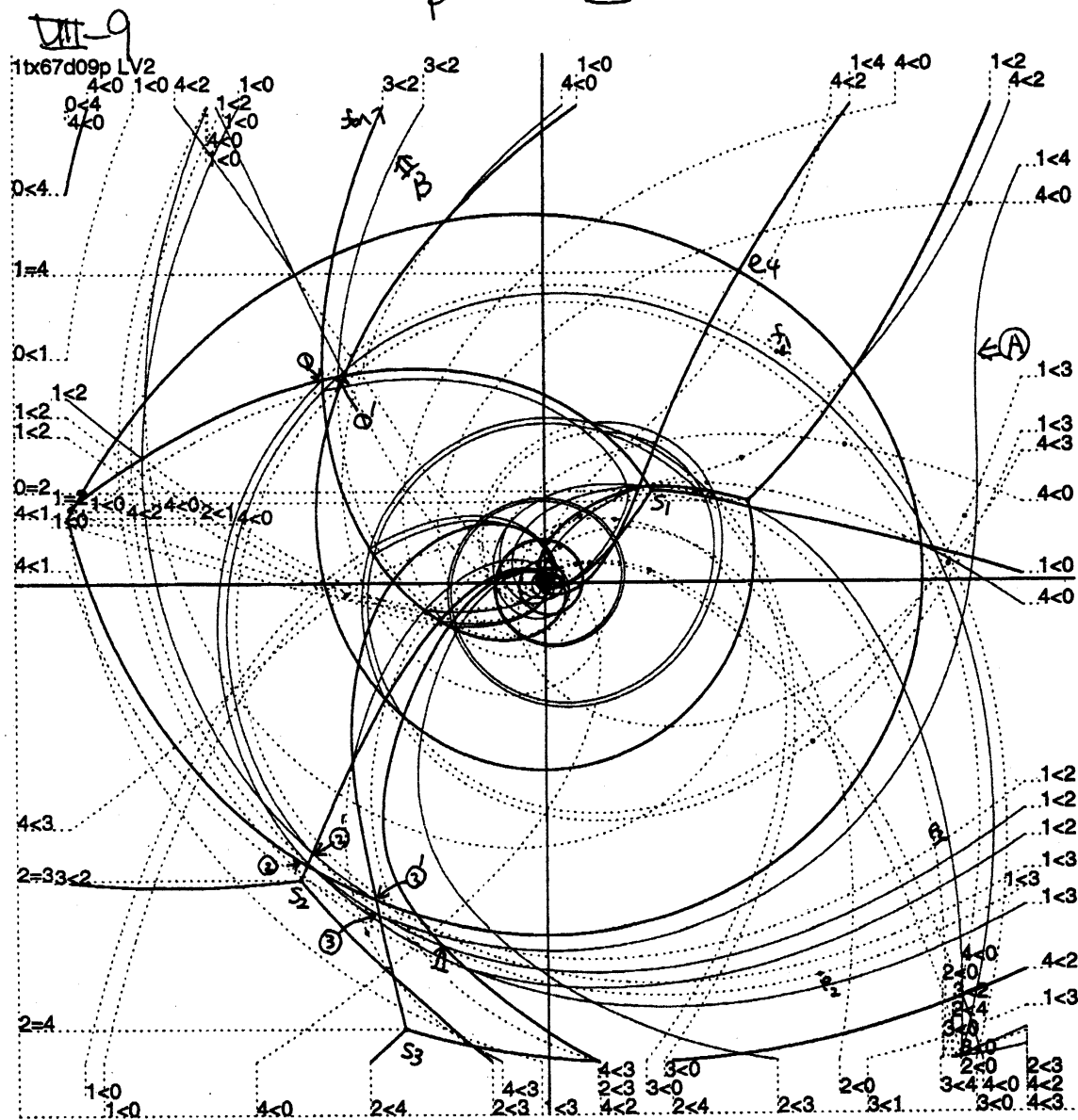
Ⅳ-6

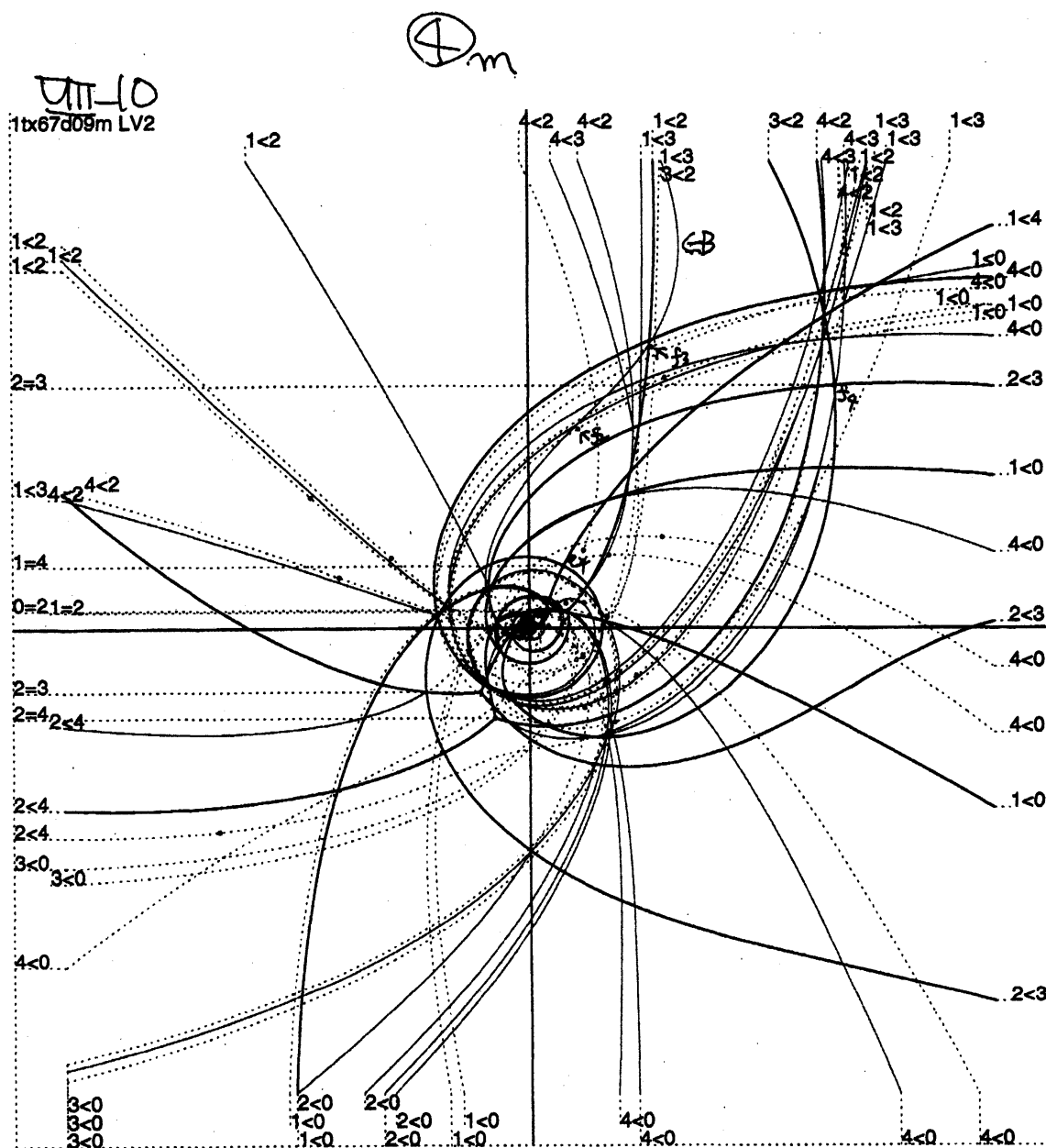
1tx67d09 LV2



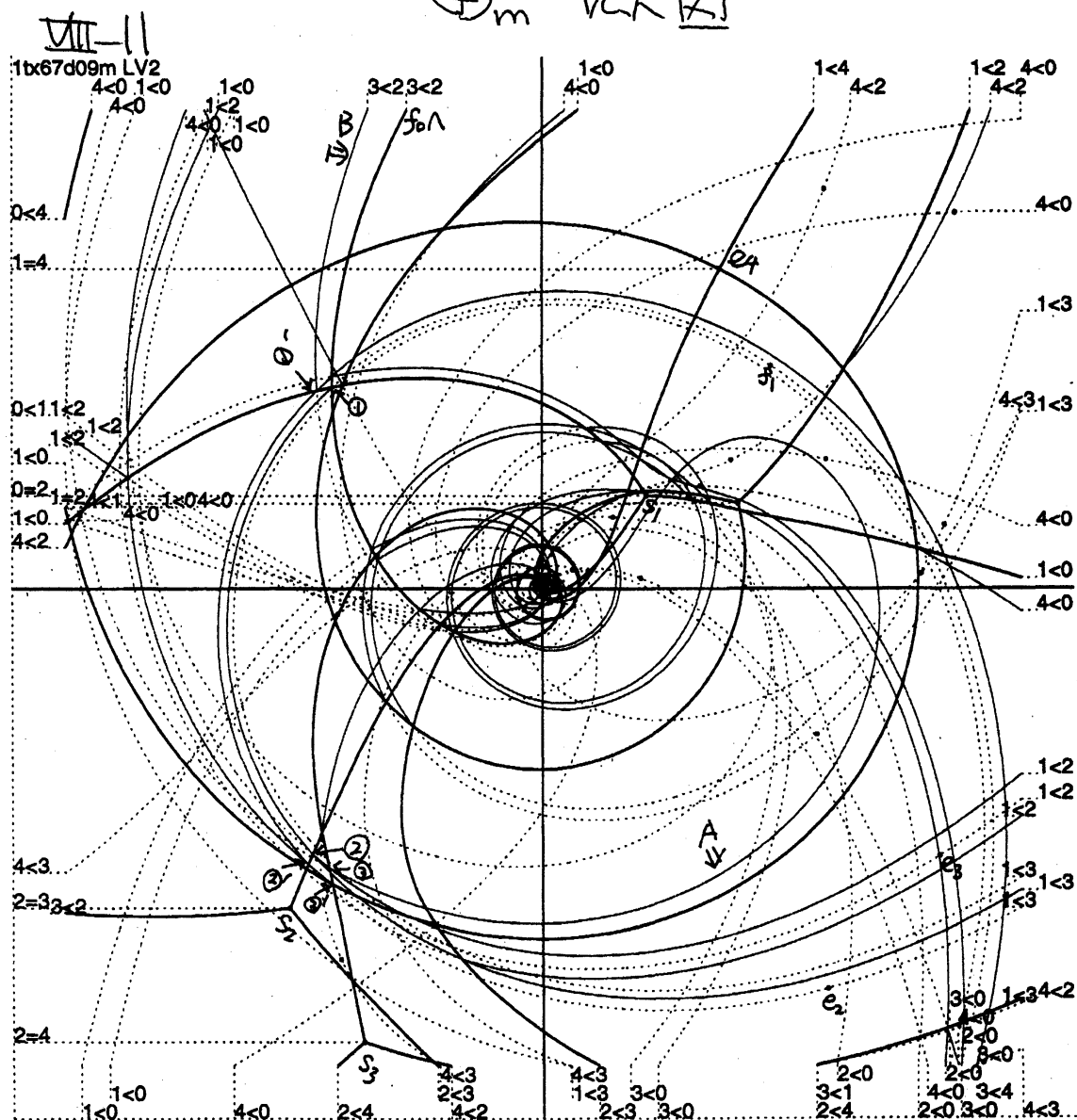


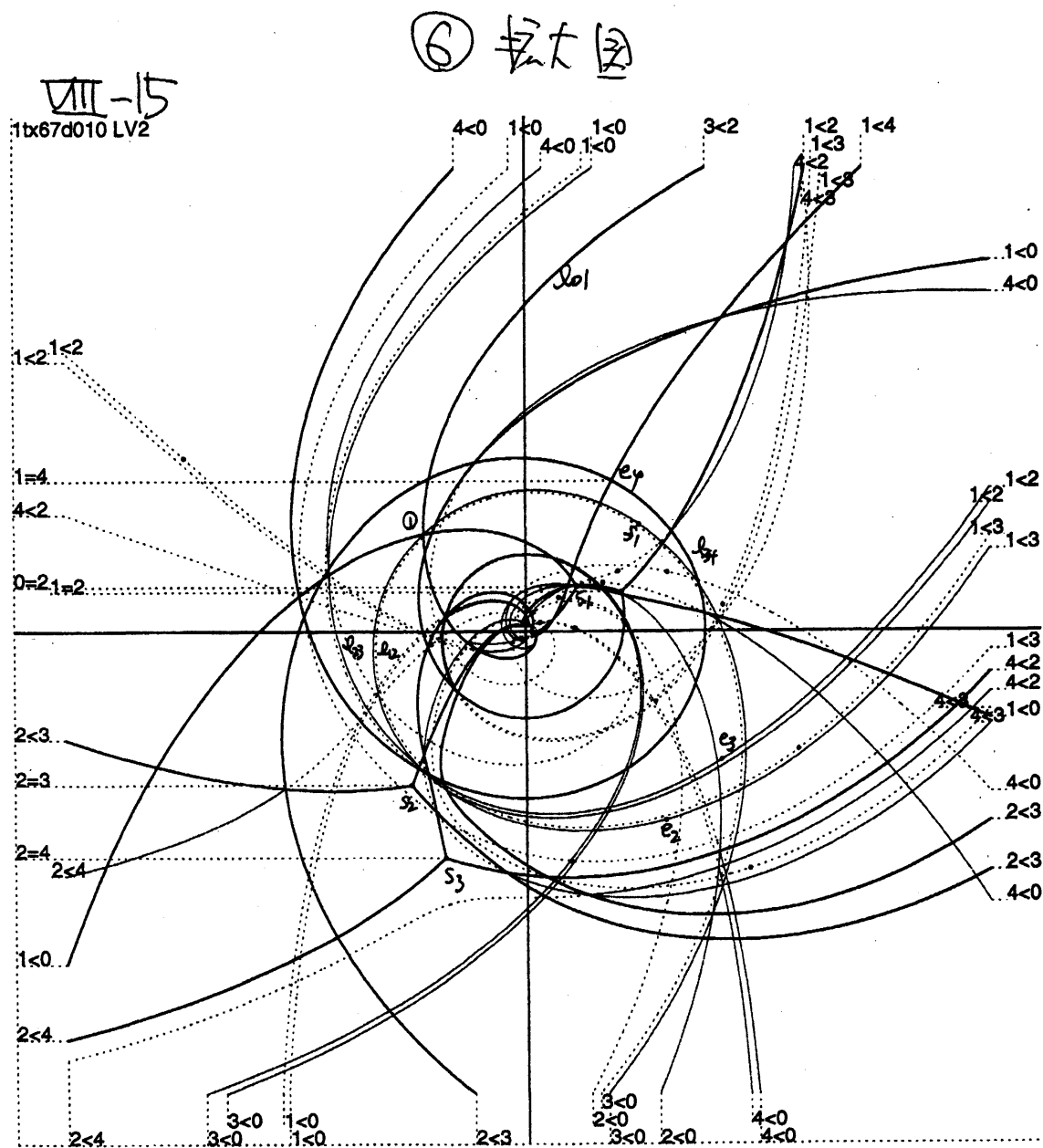
④_p 抗大圖

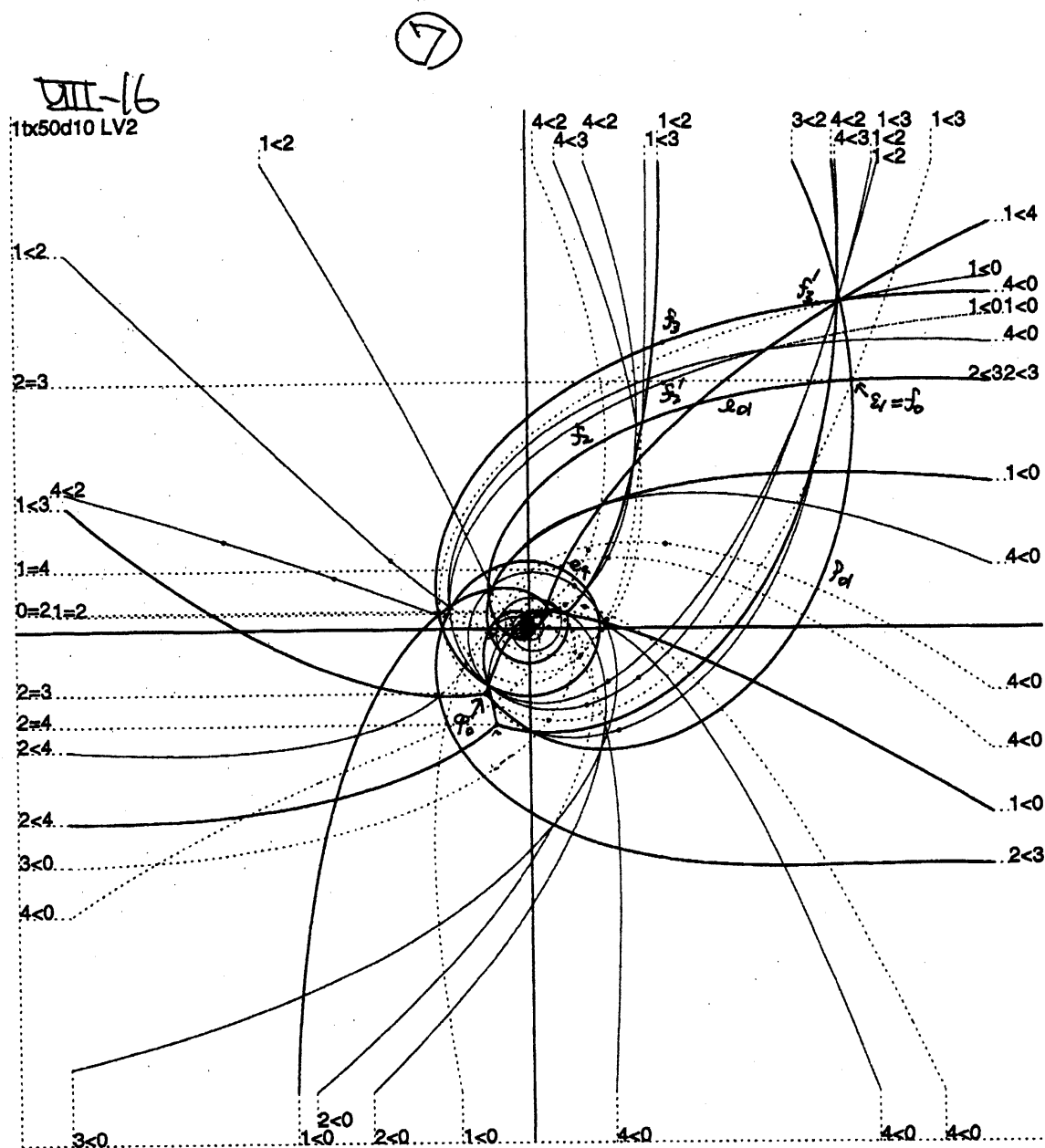


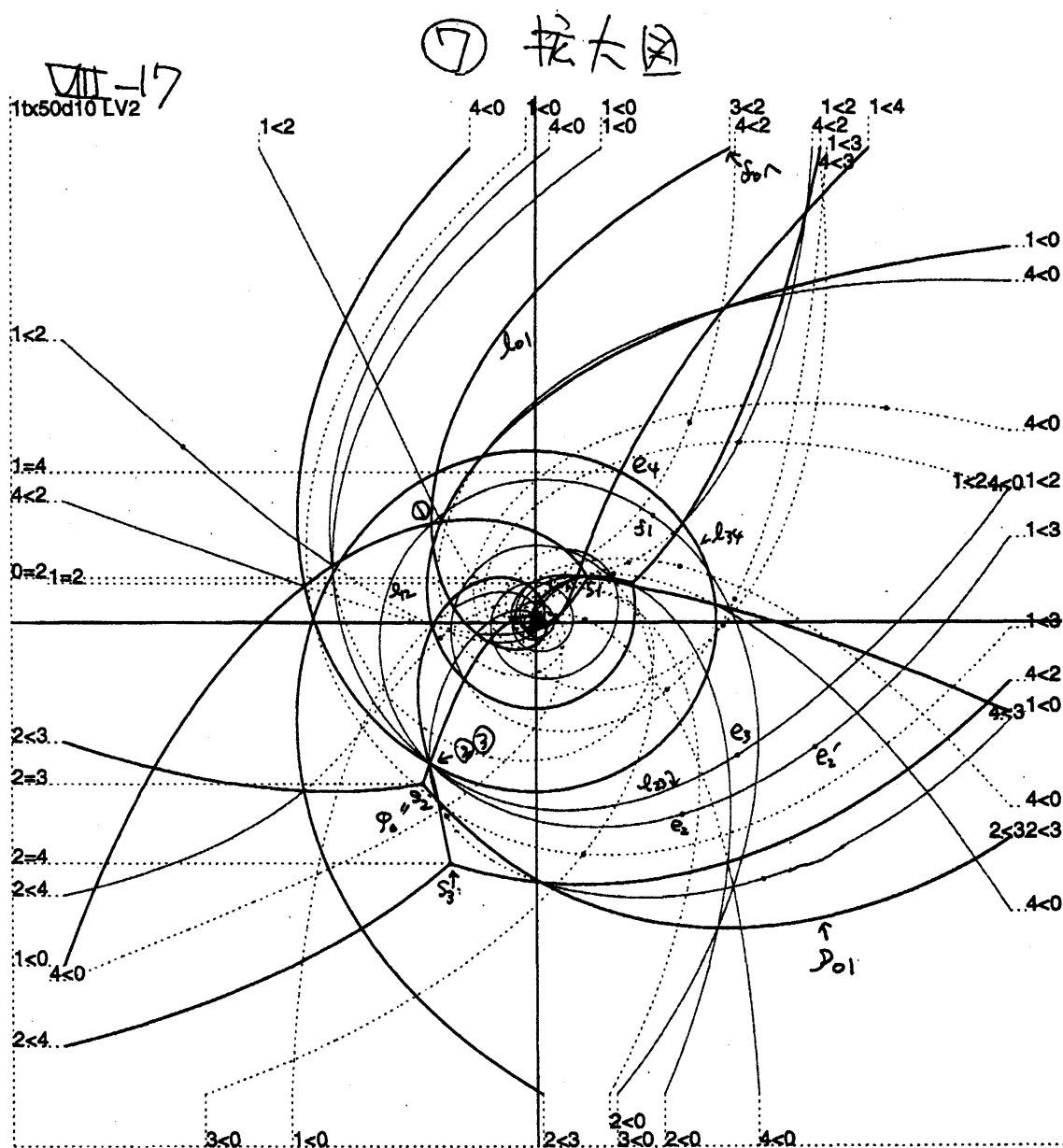


④_m 抗大团





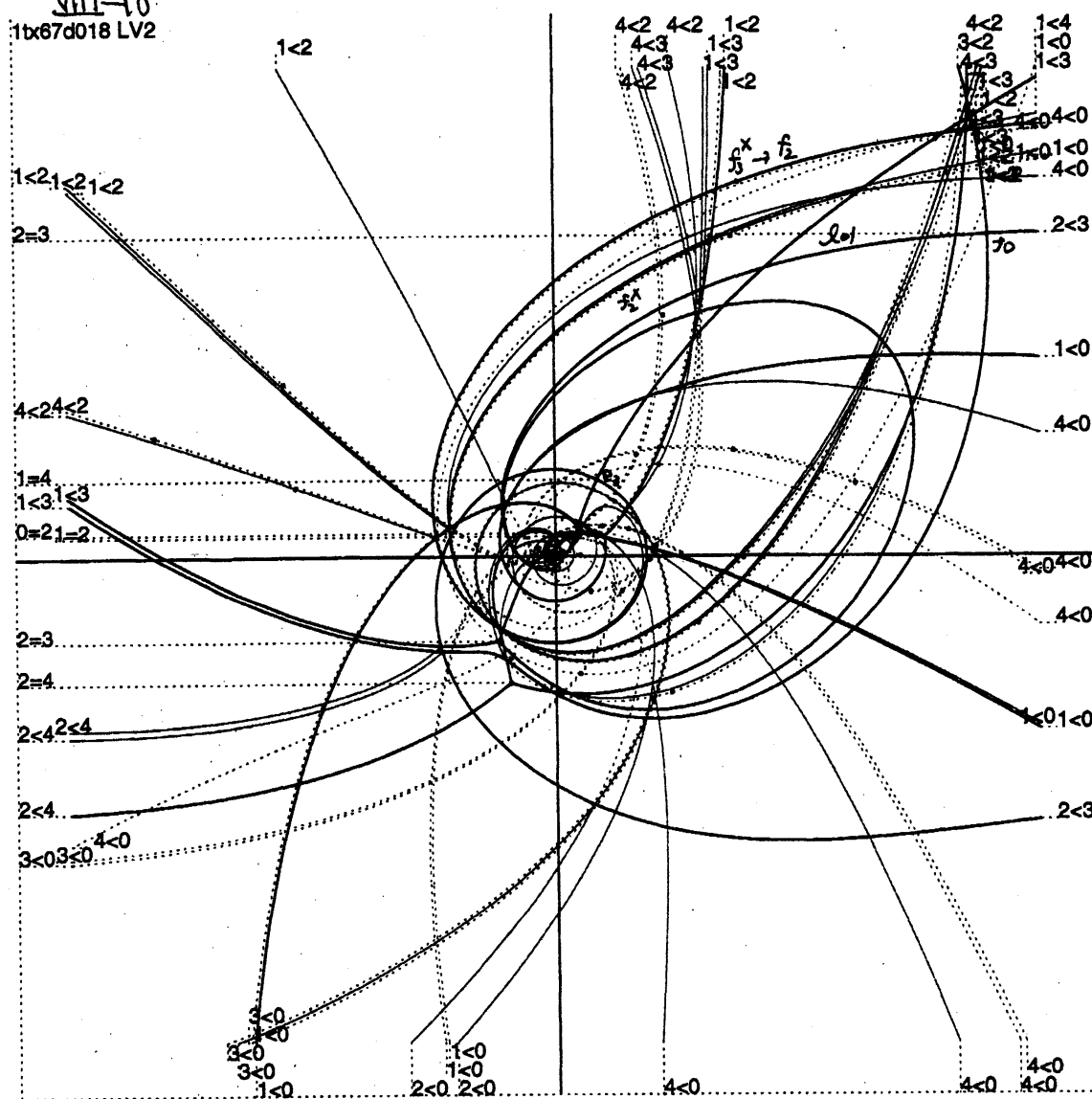


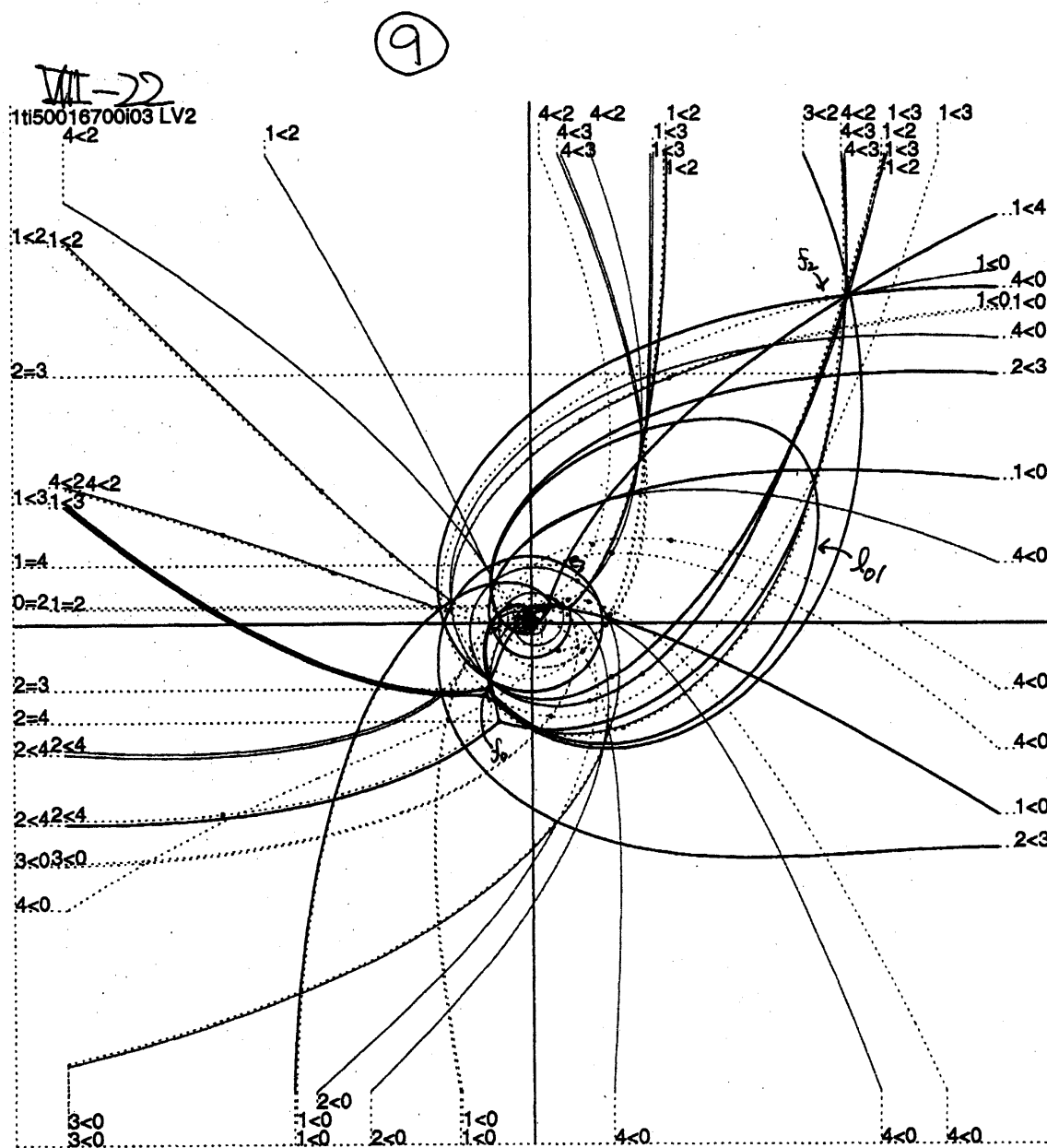


3-6

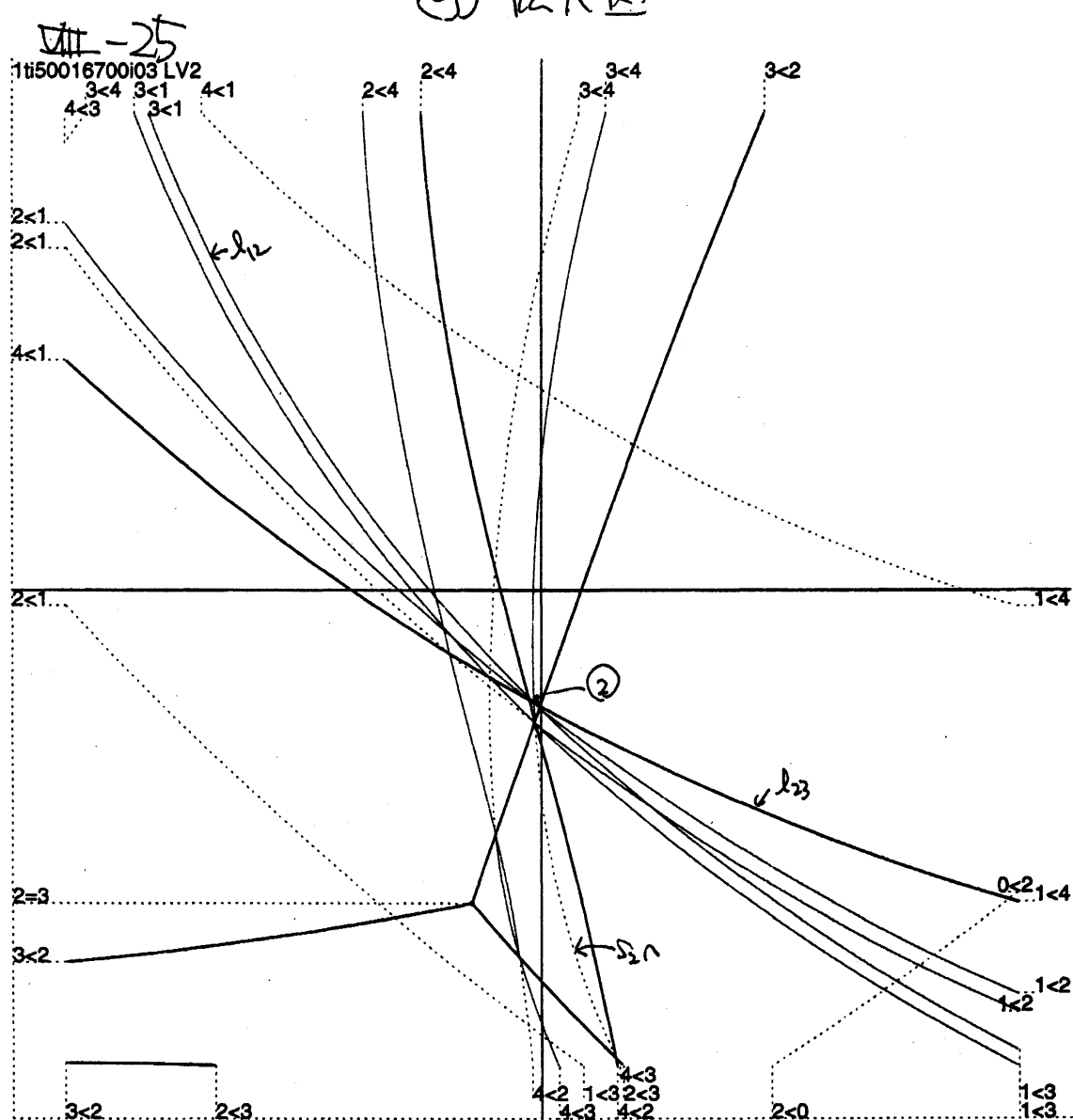
⑧

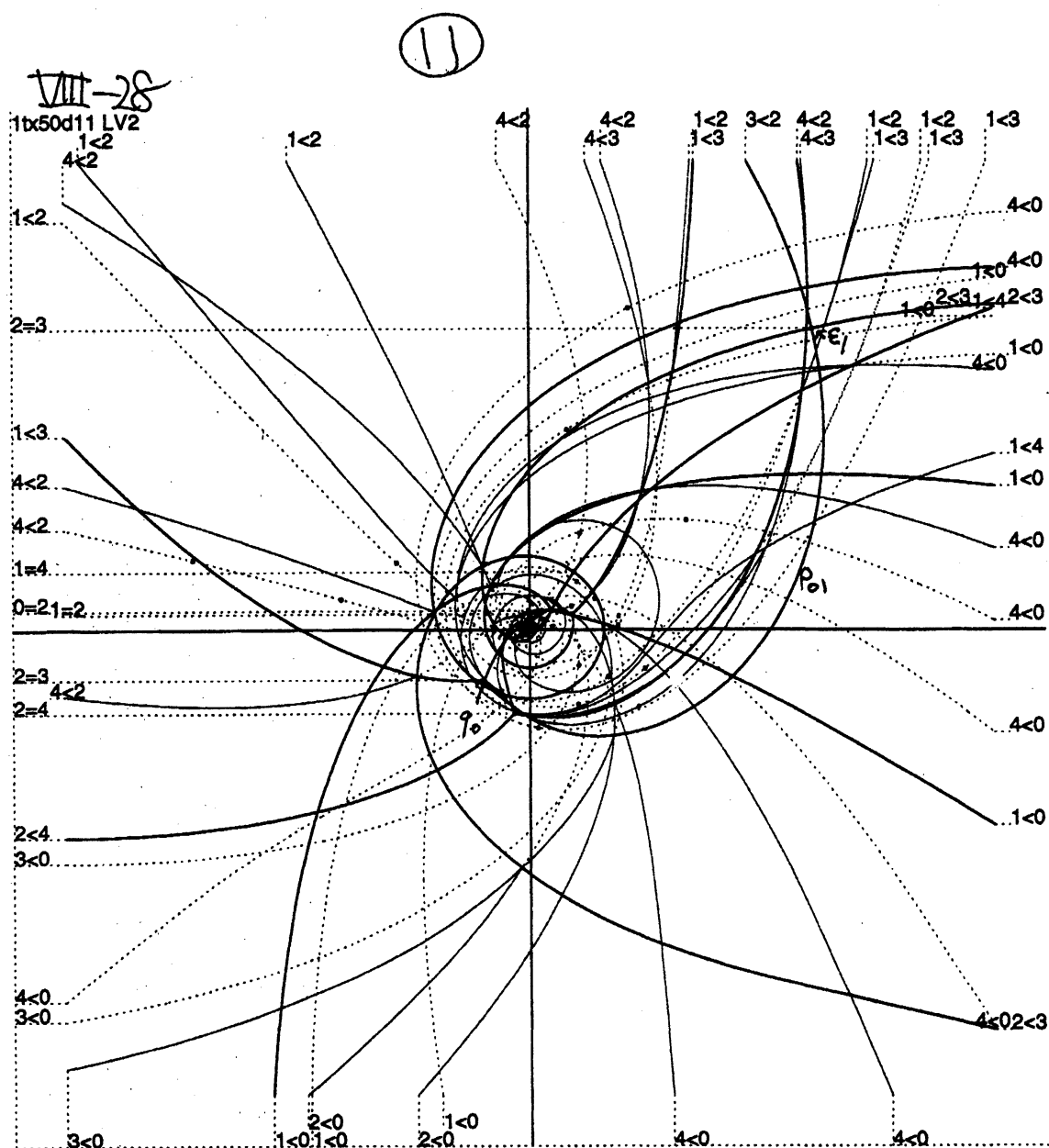
VII-18
1tx67d018 LV2

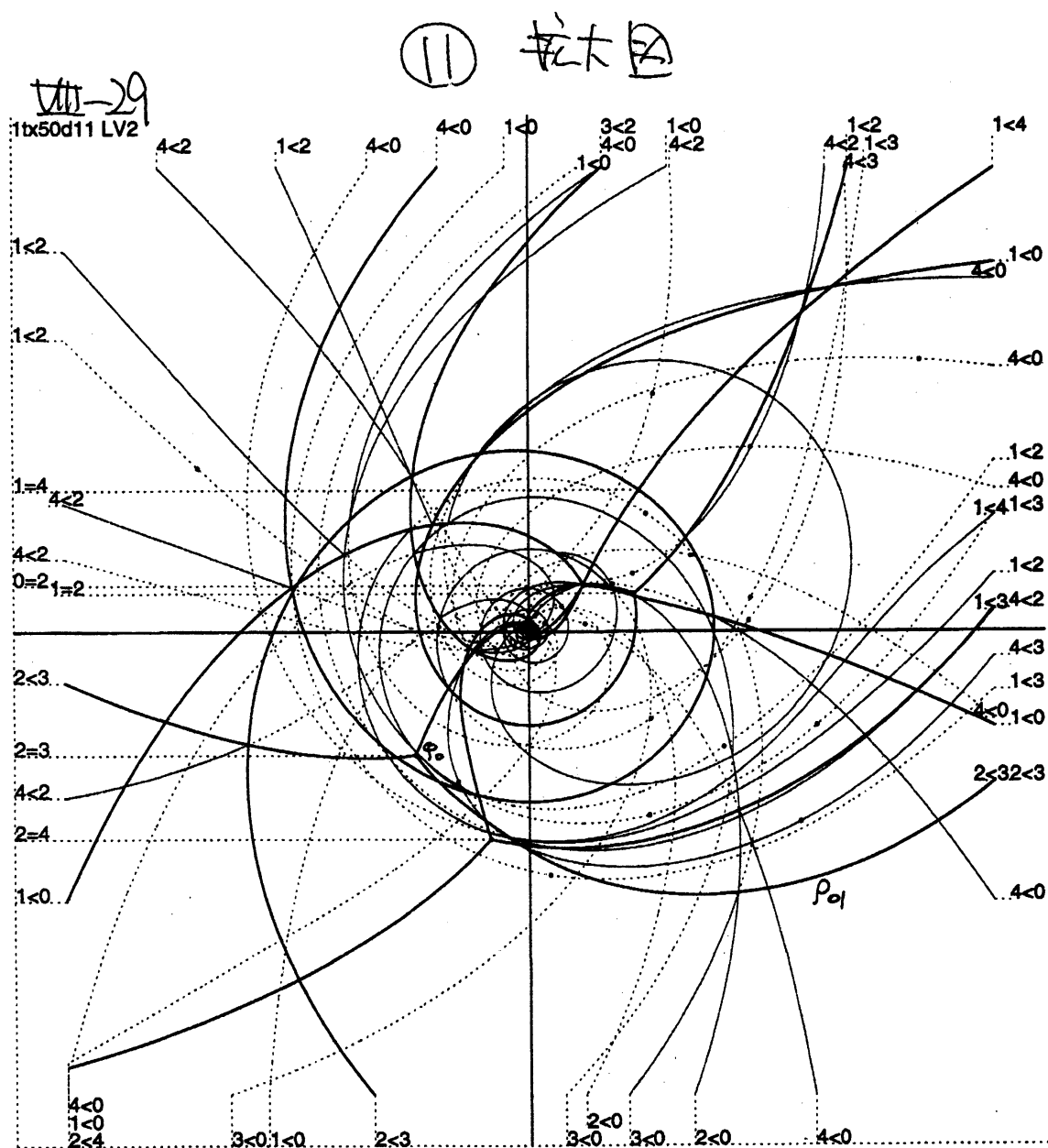


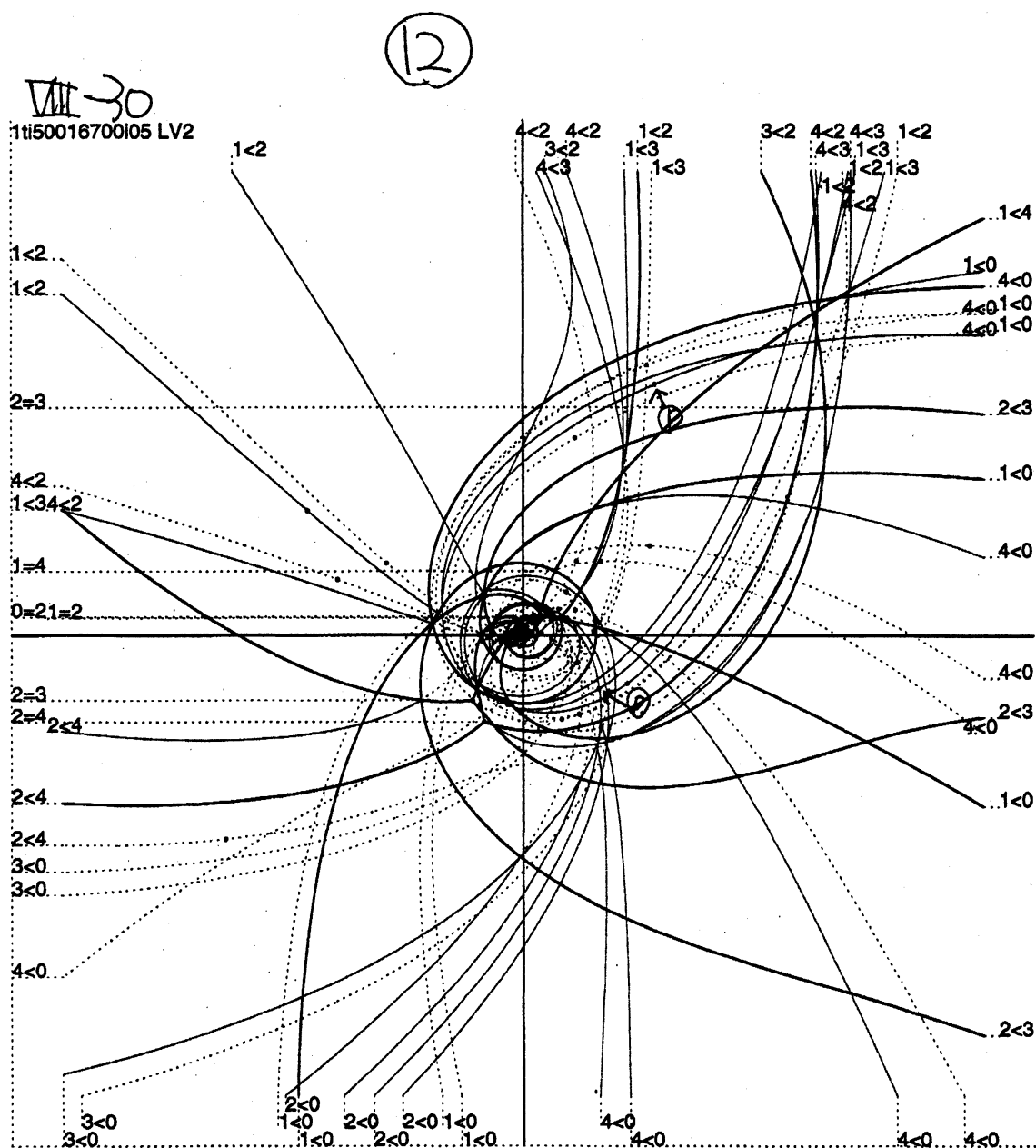


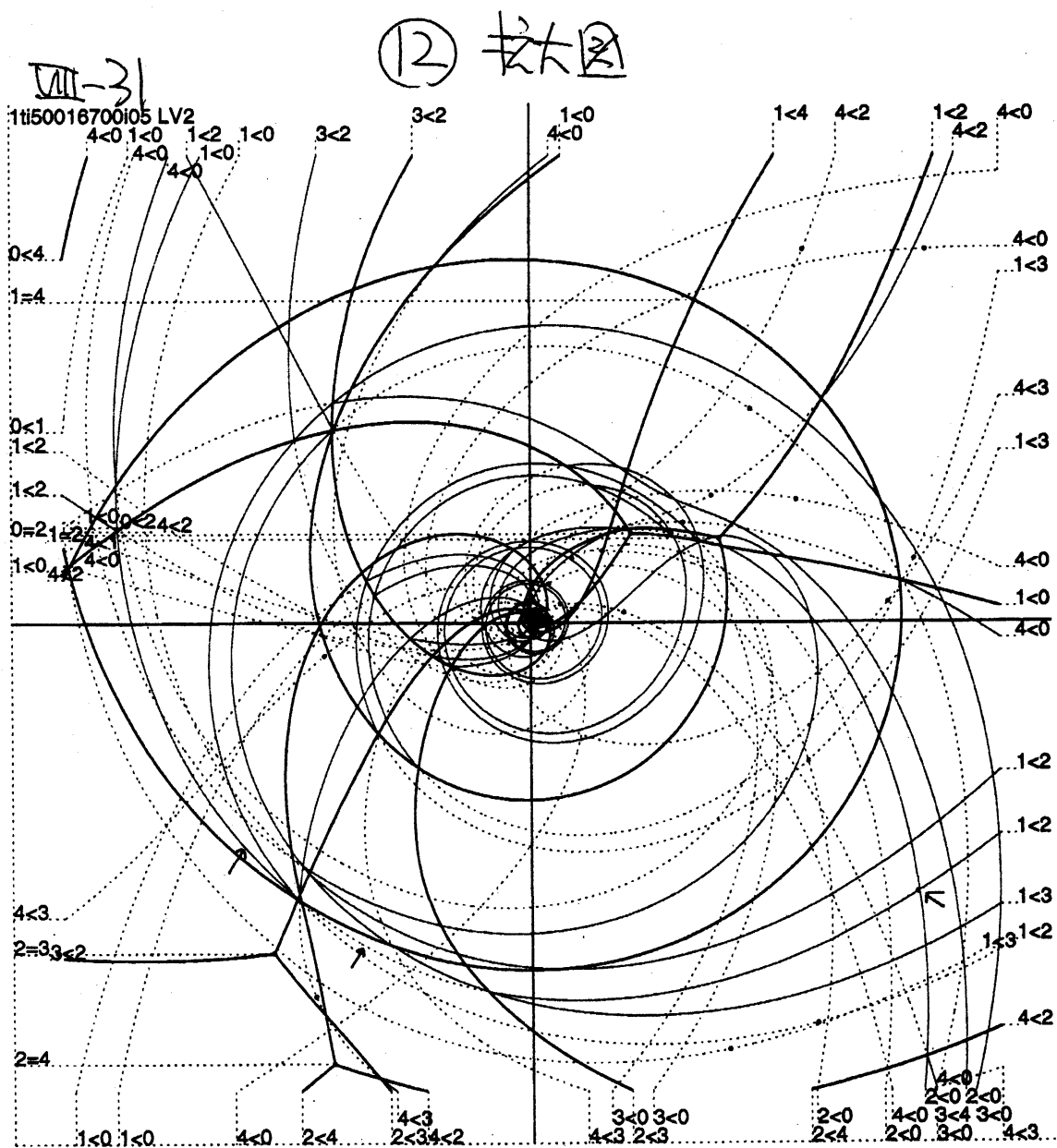
⑨ 松太田

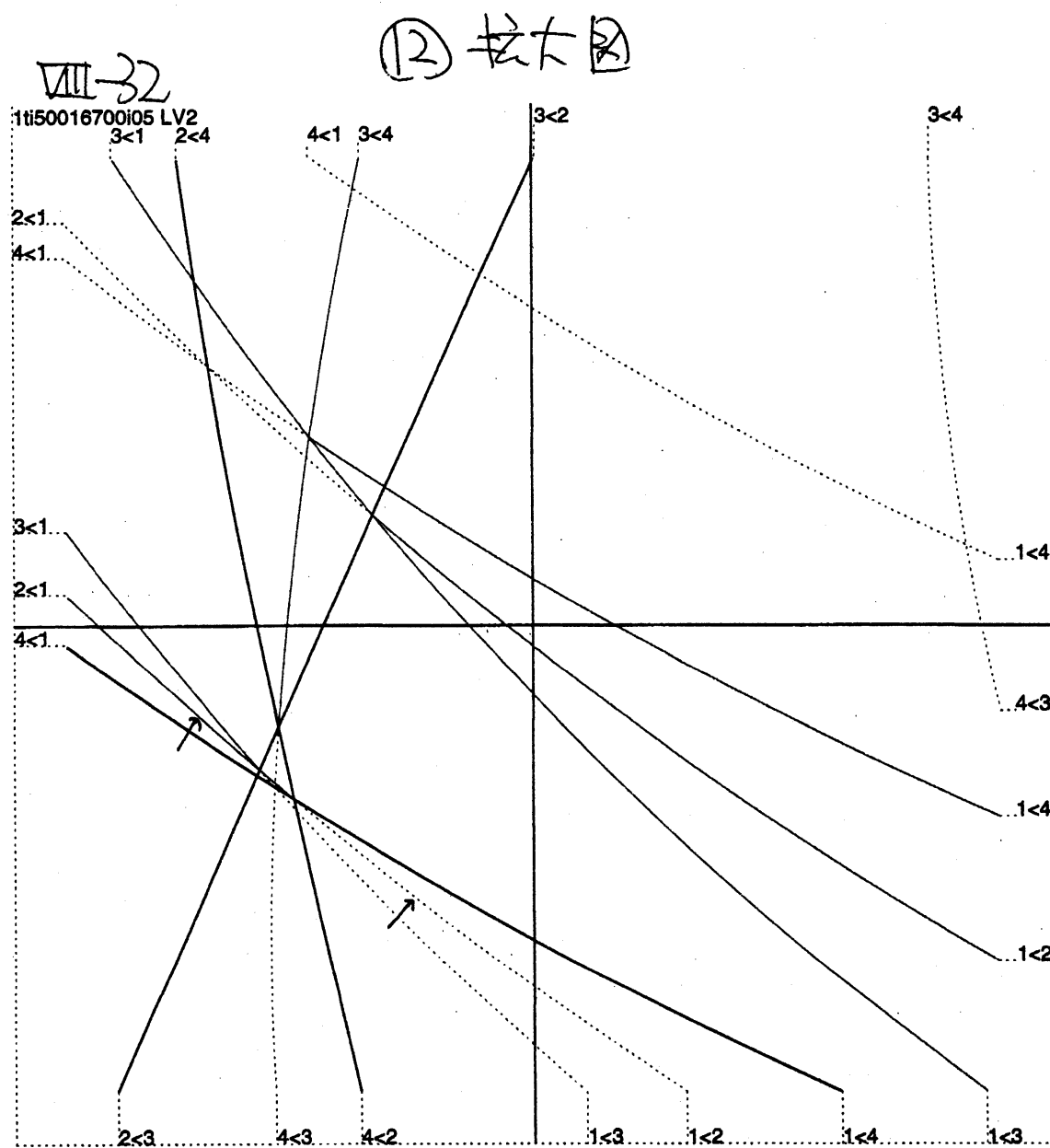


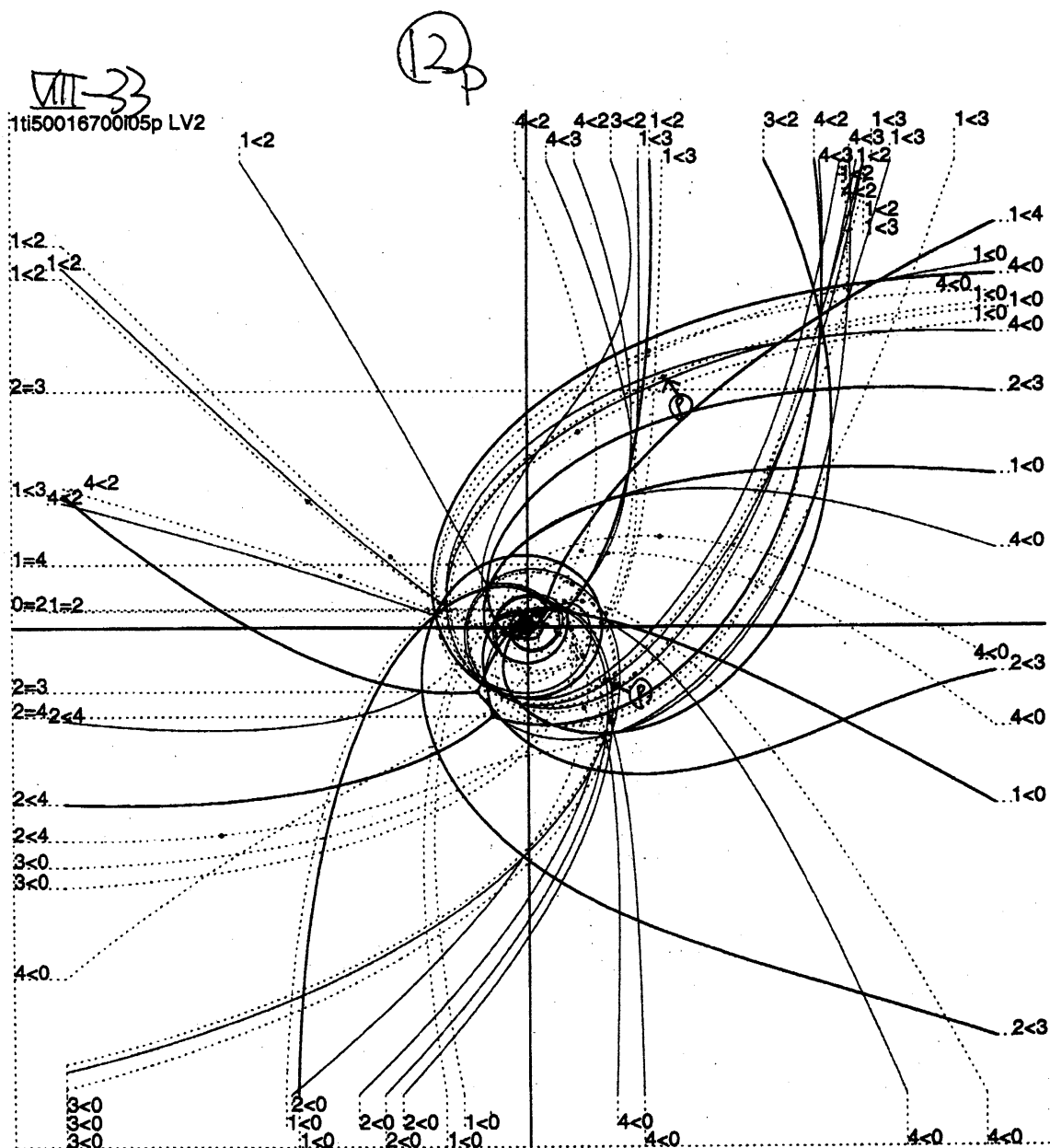








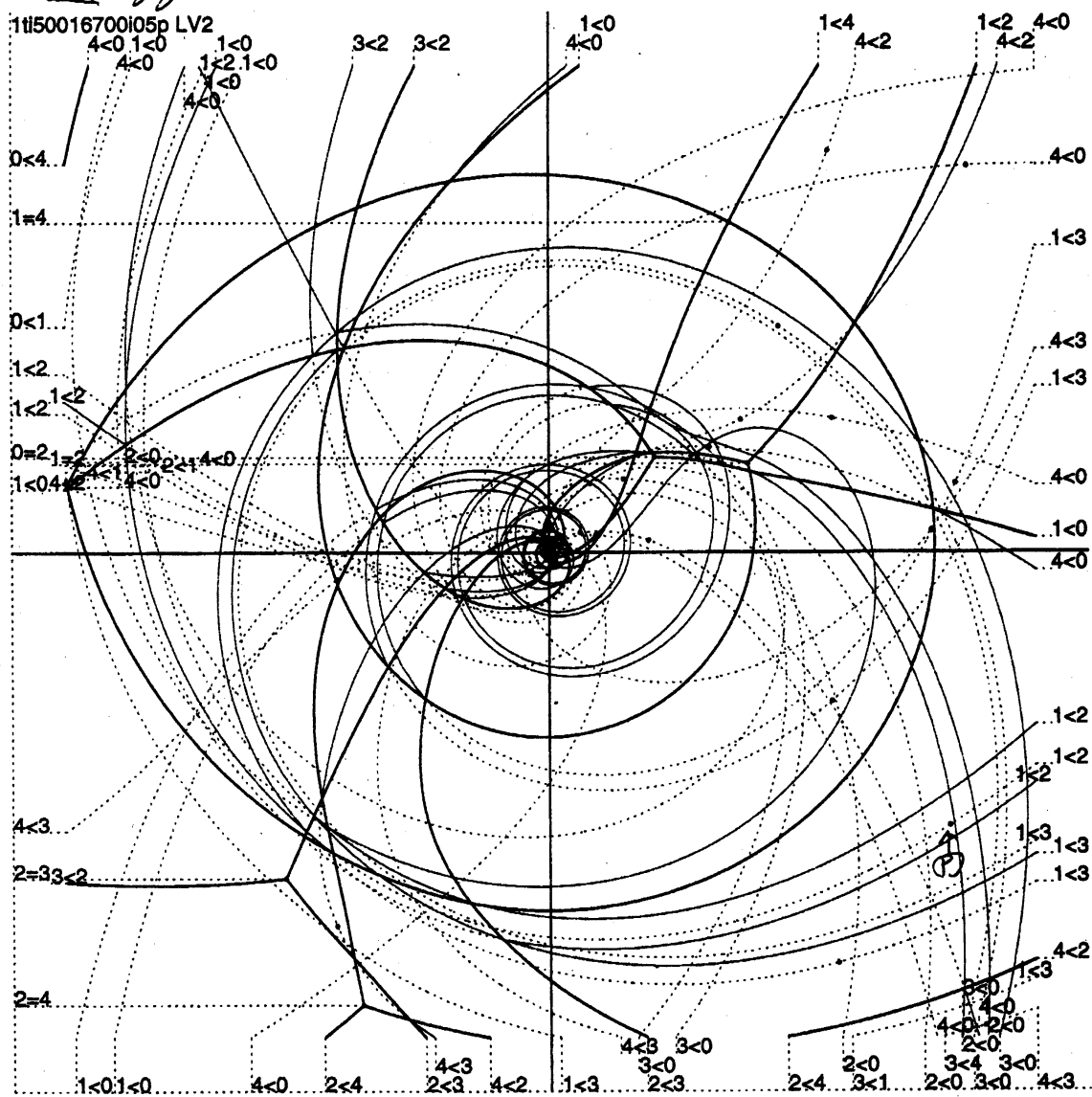


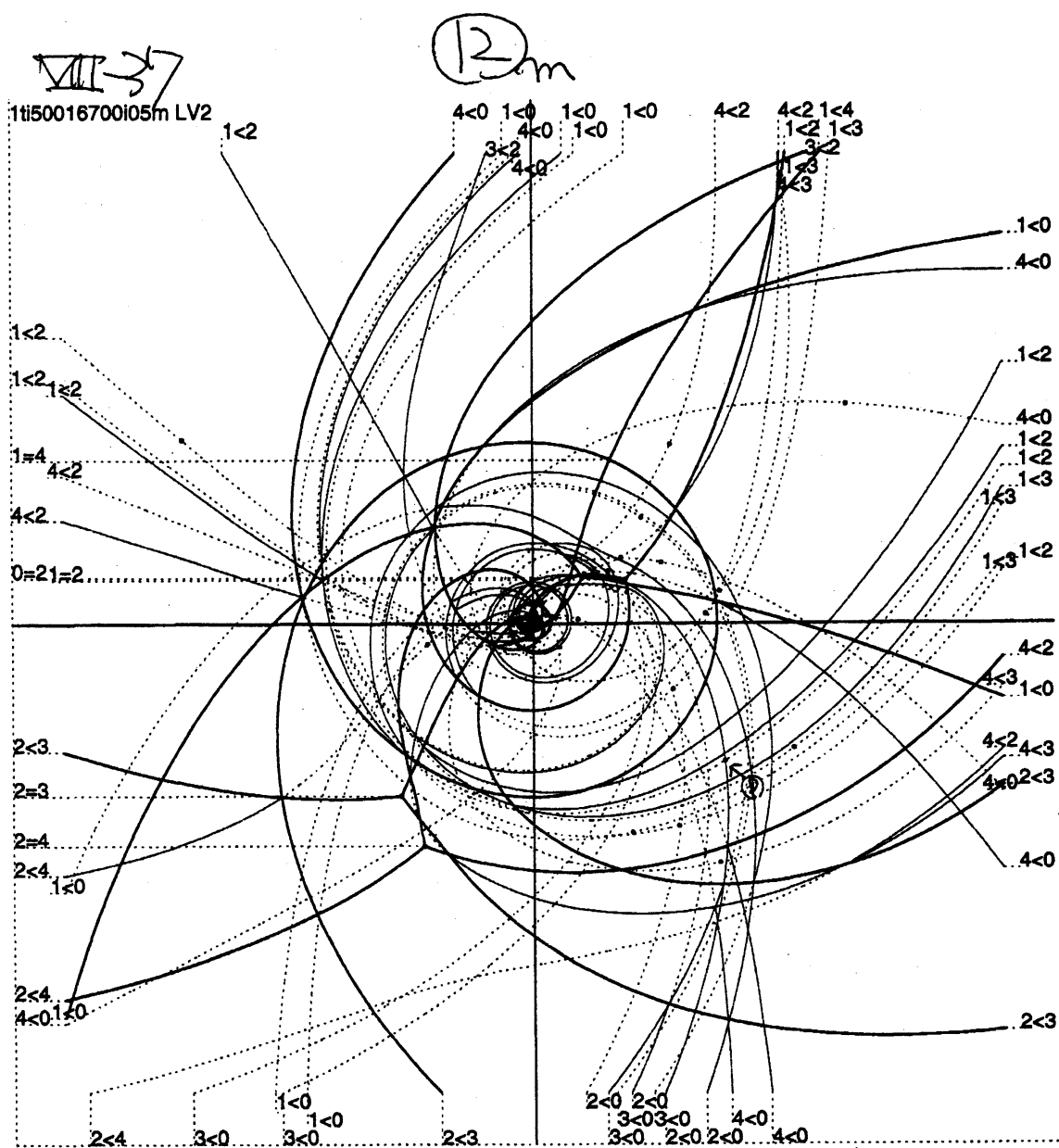


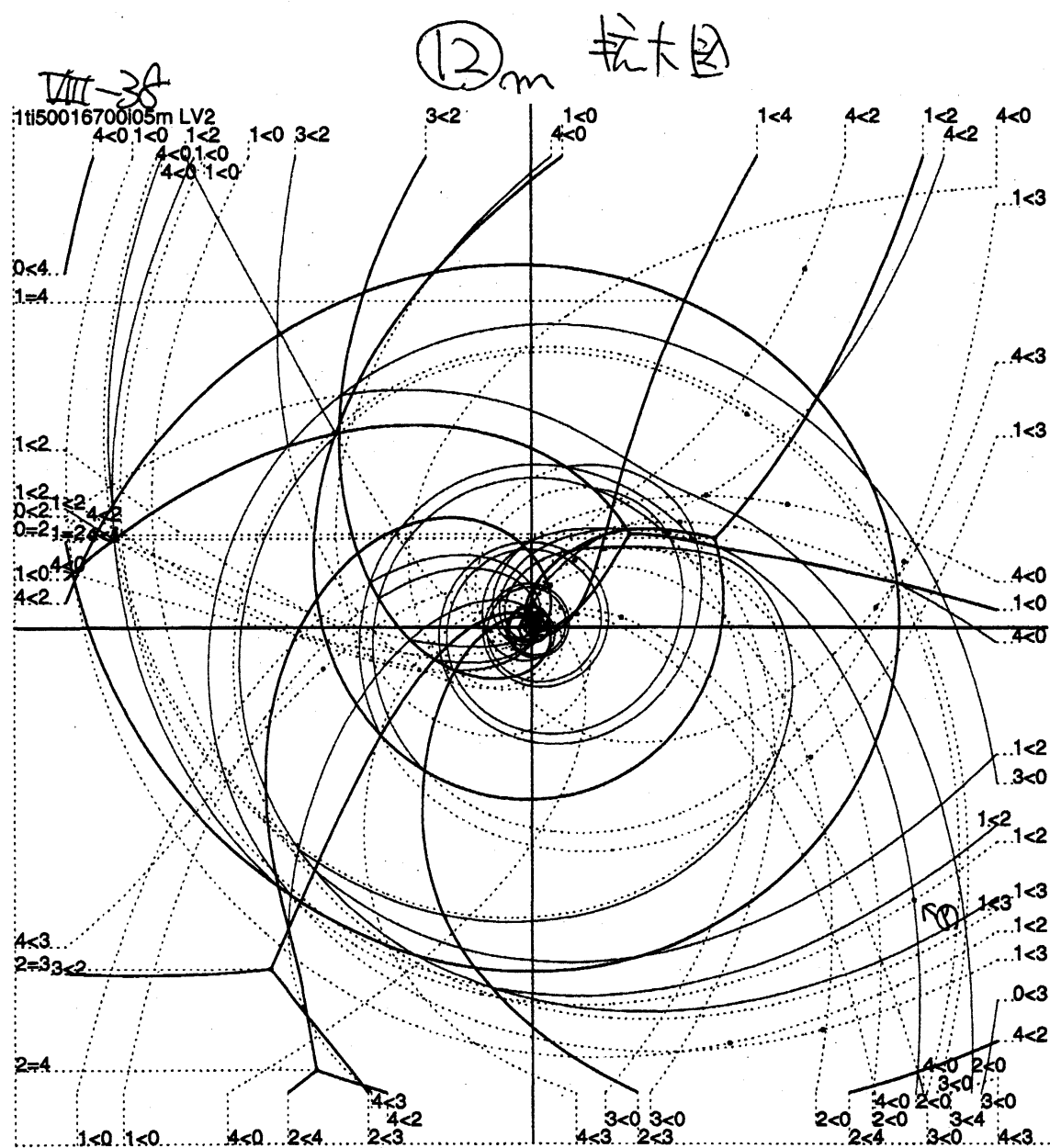
⑫ 抗阻

VIII-35

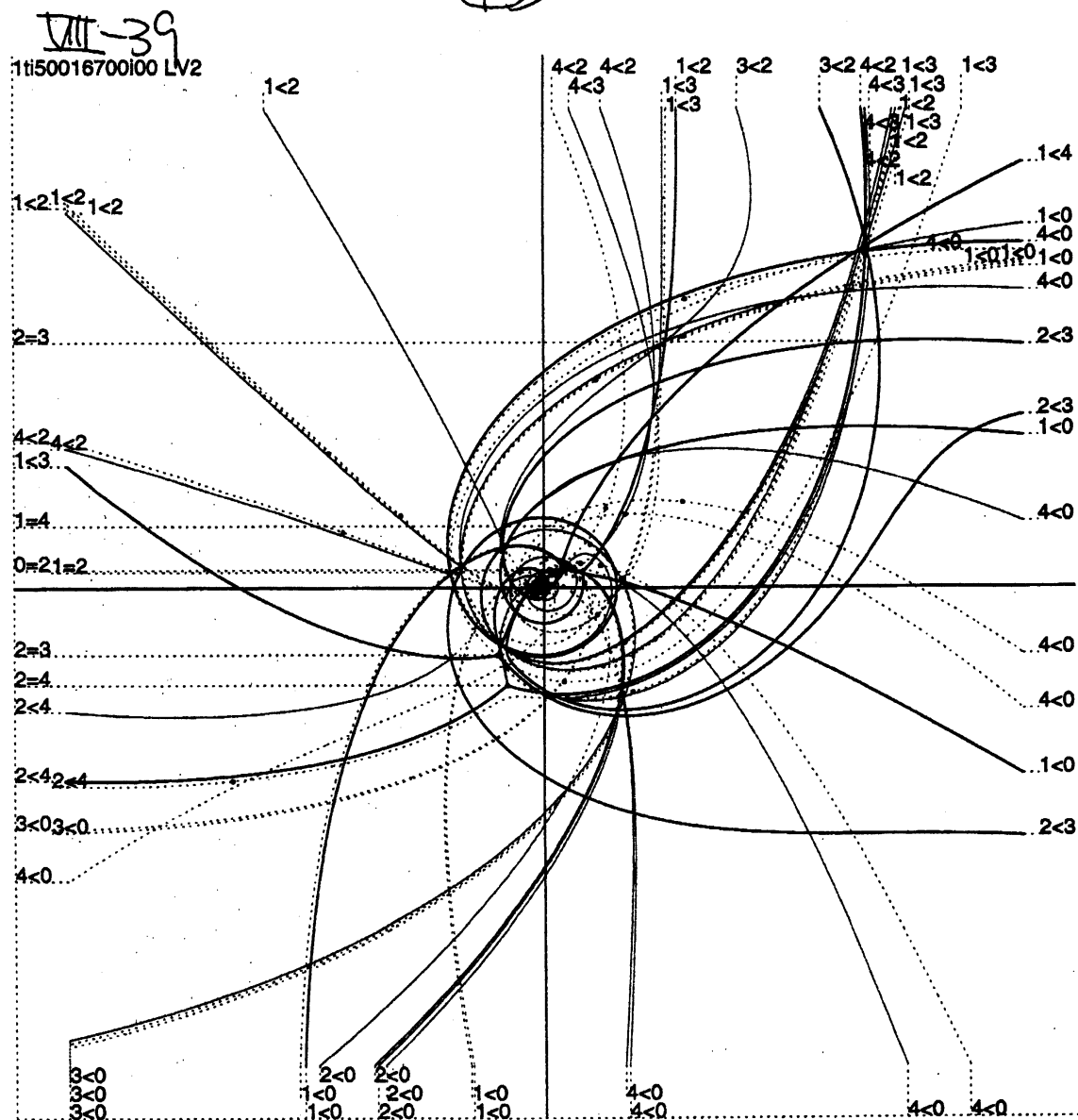
1ti50016700i05p LV2







(13)



参考文献

- [AH] T. Aoki and N. Honda, Regular sequences associated with the Noumi-Yamada equations with a large parameter, to appear.
- [AKKSST] T. Aoki, T. Kawai, T. Koike, S. Sasaki, S. Shudo and Y. Takei, A background story and some know-how of virtual turning points, RIMS Koukyuuroku, No.1424, (2005), 53-64
- [AKT] T. Aoki, T. Kawai and T. Takei, New turning points in the exact WKB analysis for higher-order differential equations, *Analyse Algébrique des Perturbations Singulières, I*, Hermann, (1994), 69-84
- [KKNT] T. Kawai, T. Koike, Y. Nishikawa and Y. Takei, On the Stokes geometry of higher order Painlevé equations, *Astérisque*, No.297, (2004), 117-166
- [NY] M. Noumi and Y. Yamada, Symmetry in Painlevé equations, in: C. J. Howls, T. Kawai and Y. Takei eds., *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 245-260.
- [Sa1] S. Sasaki, On the role of virtual turning points in the deformation of higher order linear differential equations, RIMS koukyuuroku, No.1433, (2005), 27-64
- [Sa2] S. Sasaki, On the role of virtual turning points in the deformation of higher order linear differential equations II, RIMS koukyuuroku, No.1433, (2005), 65-109
- [T] Y. Takei, Toward the exact WKB analysis for higher-order Painlevé equations – The case of Noumi-Yamada Systems –, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 40 (2004), 709-730.